Мех.-мат., матем. анализ., 3-й семестр
19-е занятие. Интегралы, зависящие от параметра

Какие условия достаточны для предельного перехода под знаком интеграла?

Найти интегралы:

$\boxed{3713б}$ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx.$ $\boxed{\text{A1}}$ $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\dfrac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}\,dx.$

Какие условия достаточны для дифференцирования по параметру под знаком интеграла?

$\boxed{3726,\ n=0}$ Доказать, что *функция Бесселя индекса* 0

$$J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi)d\varphi$$

удовлетворяет *уравнению Бесселя*: $xJ_0''(x)+J_0'(x)+xJ_0(x)=0$.

Теорема. Если f и f_y' непрерывны на $[a,b]\times[c,d]$, а функции φ и ψ непрерывно отображают $[c,d]$ в $[a,b]$ и дифференцируемы на (c,d), то при $y\in(c,d)$ выполняется соотношение:

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)\,dx=f(\psi(y),y)\psi'(y)-f(\varphi(y),y)\varphi'(y)+\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f_y'(x,y)\,dx.$$

$\boxed{3718а}$ $F(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ $\boxed{\text{A2}}$ $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha^2}\dfrac{e^{\alpha x}-1}{x}\,dx\quad(\alpha>0).$

$\boxed{3718г}$ $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}f(x+\alpha,x-\alpha)\,dx$, где $f(u,v)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Вычислить интеграл с помощью дифференцирования по параметру:

$\boxed{3734}$ $I(a)=\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx.$

Домашнее задание № 19
Матем. анализ, мех.-мат., 3-й семестр

Повторить теоремы о несобственных интегралах!

Найти пределы:

$\boxed{3713а}$ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\displaystyle\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$. $\boxed{3713в}$ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\displaystyle\int\limits_{0}^{2}x^2\cos\alpha x\,dx$.

$\boxed{3713г}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$. Подробно обосновать предельный переход.

$\boxed{3726}$ Доказать, что при любом $n\in\mathbb{Z}$ функция Бесселя индекса n

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi$$

удовлетворяет *уравнению Бесселя*

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

Найти $F'(\alpha)$:

$\boxed{3718б}$ $F(\alpha)=\displaystyle\int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$. $\boxed{3718в}$ $F(\alpha)=\displaystyle\int\limits_{0}^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$.

$\boxed{3718д}$ $F(\alpha)=\displaystyle\int\limits_{0}^{\alpha^2}dx\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)dy$.

$\boxed{3717}$ Вычислить $F'(x)$, если $F(x)=\displaystyle\int\limits_{x}^{x^2}e^{-xy^2}dy$.

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

$\boxed{3733}$ $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx$. $\boxed{3735}$ $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\,\frac{dx}{\cos x}$.

Указание к 3733: после дифференцирования по a сделать замену $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и применить метод неопределённых коэффициентов.