

Мех.-мат., матем. анализ., 3-й семестр
 20-е занятие. Несобственные интегралы,
 зависящие от параметра

[A1] Вспомнить области сходимости интегралов:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}.$$

Найти области сходимости интегралов:

$$[A2] \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha e^t}, \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha e^t}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha e^t}, \quad [A3] \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}.$$

Для сведения: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

Сформулировать определение равномерной сходимости несобственного интеграла.

[3754] Показать, что интеграл $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$

- 1) сходится равномерно в любом промежутке $[a, b]$, где $a > 0$;
- 2) сходится неравномерно в промежутке $[0, b]$.

Сформулировать признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле для равномерной сходимости несобственных интегралов.

[3755] Доказать, что интеграл Дирихле $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ сходится

- 1) равномерно на каждом сегменте $[a, b]$, не содержащем значения $\alpha = 0$;
- 2) неравномерно на каждом сегменте $[a, b]$, содержащем значение $\alpha = 0$.

Исследовать на равномерную сходимость:

$$[A4] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad [3759] \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}, \quad \alpha > 0.$$

$$[3761, p=1] \int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p}, \quad \alpha \geq 0. \quad [3762] \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx, \quad \alpha > 0.$$

Домашнее задание № 20

Матем. анализ, мех.-мат., 3-й семестр

Найти области сходимости интегралов:

$$\boxed{\text{A1}} \int_0^1 \frac{\cos x}{x^p} dx. \quad \boxed{3743} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx. \quad \boxed{3744} \int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}.$$

$\boxed{3755.3}$ Показать, что интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$ сходится неравномерно в интервале $(1, +\infty)$.

Повторить формулировки признаков равномерной сходимости: Вейерштрасса, Дирихле, Абеля. Попытаться провести доказательства.

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках:

$$\boxed{3755.1} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \text{а) } \alpha \in [\alpha_0, +\infty); \quad \text{б) } \alpha \in (1, +\infty).$$

$$\boxed{3755.2} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1). \quad \boxed{3756} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx, \quad \alpha \in (\alpha_0, +\infty).$$

$$\boxed{3757} \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx, \quad \alpha \in [a, b]. \quad \boxed{3758} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{3760} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha \geq 0. \quad \boxed{3760.1} \int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx, \quad p \in [0, 10].$$

$$\boxed{3763} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx; \quad \text{а) } \alpha \in [a, b]; \quad \text{б) } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{3767} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$