1-е занятие. Алгебраическая форма комплексного числа. Абсолютная величина и операция сопряжения Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Вспомнить определения величин $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\bar{z}$, где $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Доказать формулы:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z).$$

$\boxed{\text{A2}}$ Отметить на комплексной плоскости множества точек, заданные следующими условиями:

а) $\mathrm{Re}(z) = 2$; б) $\mathrm{Re}(z) \leqslant -1$; в) $\mathrm{Im}(z) > 0$;
г) $z = \bar{z}$; д) $\mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)$; е) $2\,\mathrm{Re}(z) + 3\,\mathrm{Im}(z) - 6 = 0$;
ё) $|z| = 3$; ж) $|z| < 1$; з) $|z| \geqslant 4$.

$\boxed{\text{A3}}$ Выполнить указанные действия: а) $(1 - i\sqrt{2})^4$, б) $\dfrac{2+5i}{1-4i}$.

$\boxed{\text{A4}}$ Вычислить абсолютные величины следующих комплексных чисел:

а) $\cos\varphi + i\sin\varphi$; б) $\sin\varphi + i\cos\varphi$; в) $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$; г) $\dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

$\boxed{\text{A5}}$ Выяснить геометрический смысл величины $|z_2 - z_1|$.

$\boxed{\text{A6}}$ Отметить на комплексной плоскости множества точек, заданные следующими соотношениями:

а) $|z - 2 + i| = 3$; б) $|z + 2 - 3i| < 1$; в) $|z + 1 - i| \geqslant 2$.

$\boxed{\text{A7}}$ Отметить на комплексной плоскости множества точек, заданные следующими соотношениями:

а) $|z - i| = |z + 3i|$, б) $|z - 1 + 2i| + |z + 3 + 2i| < 6$, в) $|z - i| - |z + 5i| = 2$.

$\boxed{\text{A8}}$ Доказать, что $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ и $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leqslant |z_1| \cdot |z_2|$.

$\boxed{\text{A9}}$ Доказать *неравенство треугольника* (*полуаддитивность абсолютной величины*) и выяснить его геометрический смысл:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

$\boxed{\text{A10}}$ Доказать *тождество параллелограмма* и выяснить его геометрический смысл:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Домашнее задание № 1
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Многие задачи взяты из книги
Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие. 4-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 312 с.

$\boxed{1.1}$ Выполнить указанные действия:

$$1)\ \frac{1}{i};\qquad 2)\ \frac{1-i}{1+i};\qquad 3)\ \frac{2}{1-3i};\qquad 4)\ (1+i\sqrt{3})^3.$$

$\boxed{1.2,\text{ часть}}$ Найти модули комплексных чисел $(a, b \in \mathbb{R})$:

$$\begin{array}{lllll} 1)\ 3i; & 2)\ -2; & 3)\ 1+i; & 4)\ -1-i; & 5)\ 2+5i; \\ 6)\ 2-5i; & 7)\ -2+5i; & 8)\ -2-5i; & 9)\ bi; & 10)\ a+bi. \end{array}$$

$\boxed{1.4}$ Найти все значения следующих квадратных корней и построить их:

$$6)\ \sqrt{1-i};\qquad 7)\ \sqrt{3+4i}.$$

$\boxed{A1}$ Доказать следующие свойства операции комплексного сопряжения:

$$\bar{\bar{z}} = z,\qquad \overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,\qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,\qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

$\boxed{A2}$ Доказать следующие свойства абсолютной величины (использовать свойства операции комплексного сопряжения):

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,\qquad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|.$$

$\boxed{A3}$ Вывести из неравенства треугольника *обратное неравенство треугольника* и объяснить его геометрический смысл:

$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||.$$

$\boxed{1.10}$ Доказать тождество

$$|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2).$$

Выяснить геометрический смысл указанных соотношений, сделать рисунки:

$\boxed{1.24}$ $|z-2| + |z+2| = 5.$ $\boxed{1.25}$ $|z-2| - |z+2| > 3.$

$\boxed{1.30}$ $|z| = \mathrm{Re}(z) + 1.$ $\boxed{1.31}$ $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) < 1.$

Конспект 1-го занятия. Алгебраическая форма комплексного числа. Абсолютная величина и операция сопряжения Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Вспомнить определения величин $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\bar{z}$, где $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Доказать формулы:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z).$$

Решение. Если $z = x + yi$, где $x, y \in \mathbb{R}$, то

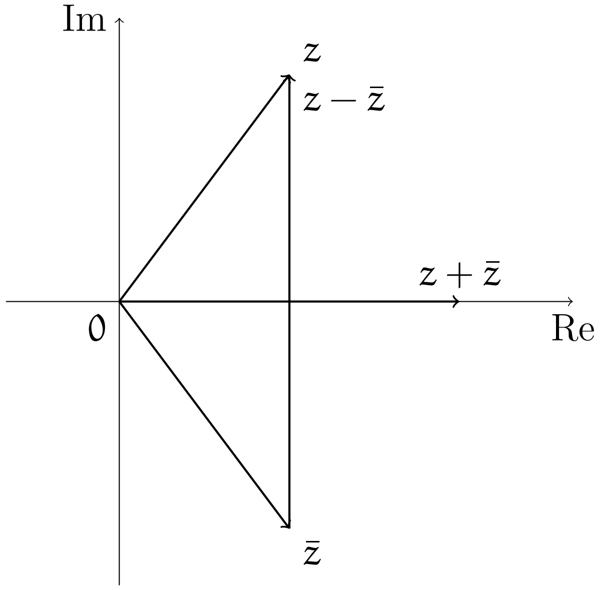
$$\mathrm{Re}(z) = x, \qquad \mathrm{Im}(z) = y, \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \bar{z} = x - yi.$$

Особо отметим, что мнимая часть комплексного числа является действительным числом (распространённая ошибка: “$\mathrm{Im}(z) = yi$”).

Из определений легко следуют нужные формулы:

$$\begin{aligned}
z \cdot \bar{z} &= (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2; \\
|\bar{z}| &= \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|; \\
z + \bar{z} &= (x + yi) + (x - yi) = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z); \\
z - \bar{z} &= (x + yi) - (x - yi) = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}(z).
\end{aligned}$$

На рисунке показаны векторы, соответствующие комплексным числам z, $\bar{z}$, $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$.



□

В домашней работе нужно будет доказать основные свойства операции сопряжения:

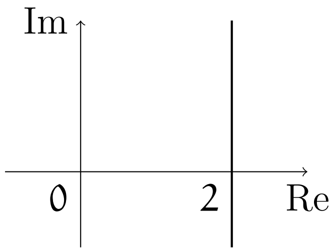
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \qquad \overline{\overline{z}} = z.$$

$\boxed{\text{A2}}$ Отметить на комплексной плоскости множества точек, заданные следующими условиями:

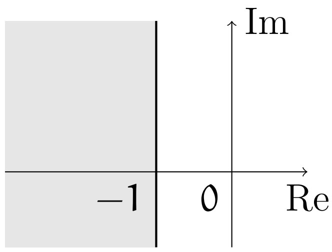
а) $\mathrm{Re}(z) = 2$; б) $\mathrm{Re}(z) \leqslant -1$; в) $\mathrm{Im}(z) > 0$;
г) $z = \bar{z}$; д) $\mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)$; е) $2\,\mathrm{Re}(z) + 3\,\mathrm{Im}(z) - 6 = 0$;
ё) $|z| = 3$; ж) $|z| < 1$; з) $|z| \geqslant 4$.

Решение.

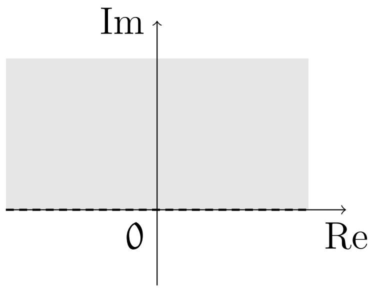
а) $\mathrm{Re}(z) = 2 \iff x = 2$.
Вертикальная прямая, проходящая через точку 2.



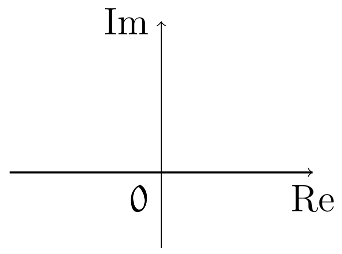
б) $\mathrm{Re}(z) \leqslant -1 \iff x \leqslant -1$.
Замкнутая полуплоскость, расположенная слева от вертикальной прямой $x = -1$.



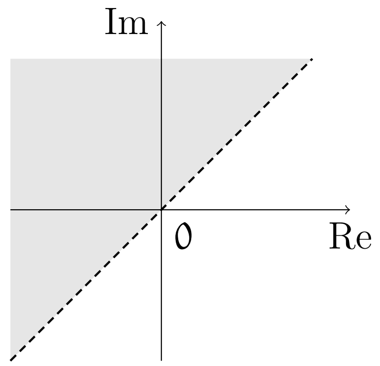
в) $\mathrm{Im}(z) > 0 \iff y > 0$. Открытая верхняя полуплоскость.



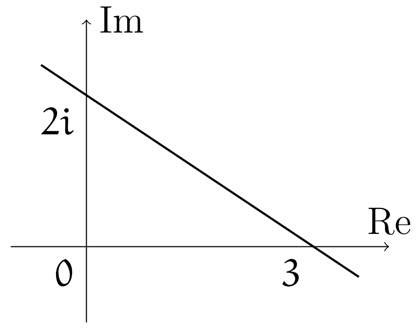
г) $z = \bar{z} \iff y = 0$. Действительная ось.



д) $\mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z) \iff x < y$.
Открытая полуплоскость, лежащая слева-сверху от прямой $x = y$.

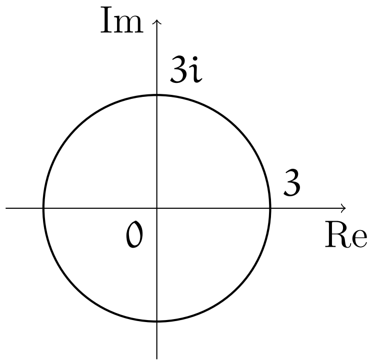


е) $2\,\mathrm{Re}(z) + 3\,\mathrm{Im}(z) - 6 = 0 \iff 2x + 3y = 6$.
Прямая, проходящая через точки $(3, 0) = 3$ и $(0, 2) = 2i$.

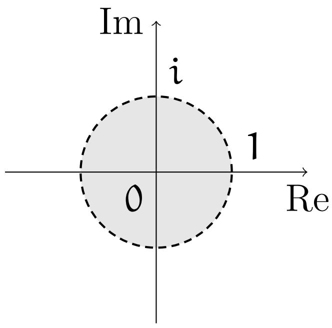


ё) $|z| = 3 \iff d(z, 0) = 3$, т. к. $|z|$ есть расстояние от z до точки $0 = (0, 0)$.

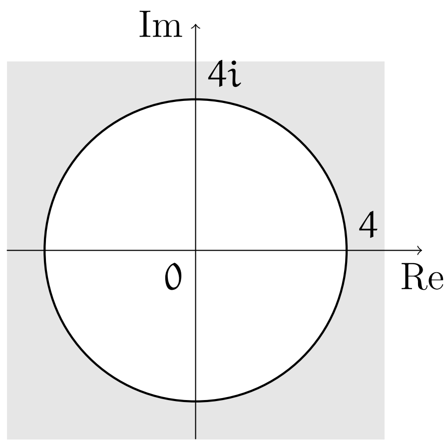
Это окружность радиуса 3 с центром в нуле.



ж) $|z| < 1$. Открытый круг радиуса 1 с центром в нуле.
Обычно называют *единичным диском* и обозначают через $\mathbb{D}$.



з) $|z| \geqslant 4$. Замкнутая внешность круга с центром 0 радиуса 4.



$\square$

$\boxed{\text{A3}}$ Выполнить указанные действия: а) $(1 - i\sqrt{2})^4$, б) $\dfrac{2+5i}{1-4i}$.

Решение. а) Сначала вспомним формулу для 4-й степени бинома:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

а также несколько начальных степеней числа i:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$$

Отсюда

$$(1 - i\sqrt{2})^4 = 1 - 4i\sqrt{2} + 6i^2 \cdot 2 - 4i^3 \cdot 2\sqrt{2} + i^4 \cdot 4 =$$
$$= 1 - 4i\sqrt{2} - 12 + 8i\sqrt{2} + 4 = -7 + 4\sqrt{2}\,i.$$

б) Чтобы выполнить деление, умножают числитель и знаменатель на число, комплексно-сопряжённое к знаменателю:

$$\frac{2+5i}{1-4i} = \frac{(2+5i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{-18+13i}{17} = -\frac{18}{17} + \frac{13}{17}i.$$

□

$\boxed{\text{A4}}$ Вычислить абсолютные величины следующих комплексных чисел:

а) $\cos\varphi + i\sin\varphi$; б) $\sin\varphi + i\cos\varphi$; в) $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$; г) $\dfrac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}$.

Решение.

а) $|\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$.

б) $|\sin\varphi + i\cos\varphi| = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = 1$.

в) В этом задании, кроме основного тригонометрического тождества, используется формула $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$:

$$|1 + \cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = \sqrt{2 + 2\cos\varphi} =$$
$$= \sqrt{2(1+\cos\varphi)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|.$$

г) Воспользуемся тем, что $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$:

$$\left|\frac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}\right| = \frac{|1 + i\operatorname{tg}\alpha|}{|1 - i\operatorname{tg}\alpha|} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = 1.$$

□

$\boxed{\text{A5}}$ Выяснить геометрический смысл величины $|z_2 - z_1|$.

Решение. Комплексное число $z_2 - z_1$ соответствует вектору с началом в z_1 и концом z_2. Величина $|z_2 - z_1|$ есть длина этого вектора, т. е. расстояние между точками z_1 и z_2:

$$\boxed{|z_2 - z_1| = d(z_1, z_2).}$$

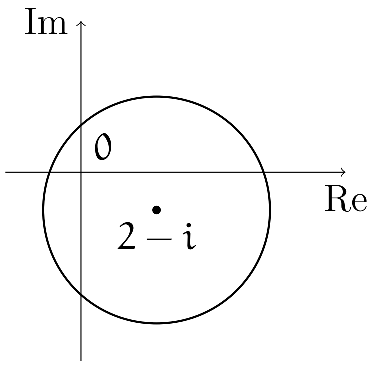
□

$\boxed{\text{A6}}$ Отметить на комплексной плоскости множества точек, заданные следующими соотношениями:

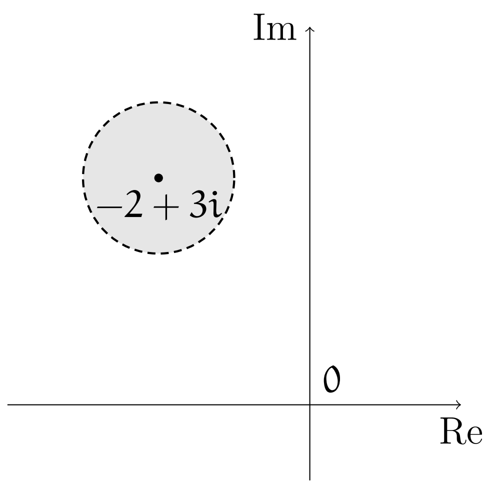
а) $|z - 2 + i| = 3$; б) $|z + 2 - 3i| < 1$; в) $|z + 1 - i| \geqslant 2$.

Решение.

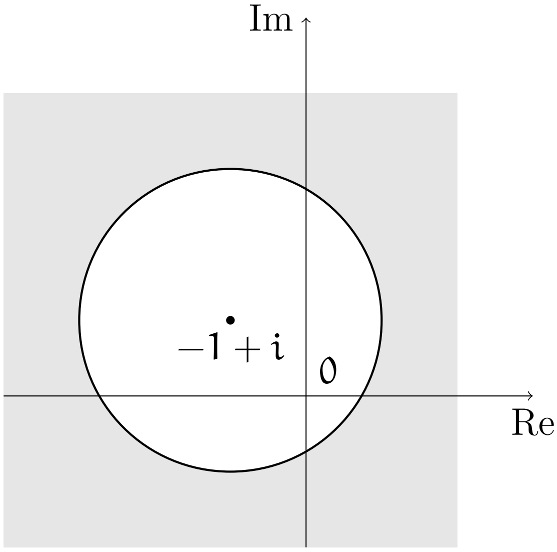
а) $|z - 2 + i| = 3 \iff d(z, 2 - i) = 3$.
Окружность с центром $2 - i$ радиуса 3.



б) $|z + 2 - 3i| < 1 \iff d(z, -2 + 3i) < 1$.
Открытый круг с центром $-2 + 3i$ радиуса 1.



в) $|z+1-i| \geqslant 2 \iff d(z,-1+i) \geqslant 2$.
Замкнутая внешность окружности с центром $-1+i$ радиуса 2.



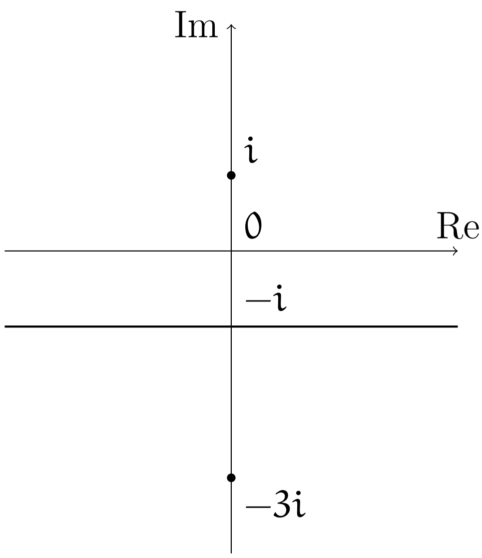
□

$\boxed{\text{A7}}$ Отметить на комплексной плоскости множества точек, заданные следующими соотношениями:

а) $|z-i| = |z+3i|$, б) $|z-1+2i|+|z+3+2i| < 6$, в) $|z-i|-|z+5i| = 2$.

Решение.

а) Введём обозначения: $z_1 = i$, $z_2 = -3i$. Соотношение $|z-z_1| = |z-z_2|$ можно переписать в виде $d(z,z_1) = d(z,z_2)$. Как известно из школьного курса геометрии, множество точек, равноудалённых от двух заданных точек z_1 и z_2, представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку с концами z_1 и z_2. В нашем случае это прямая $\operatorname{Im} z = -1$.



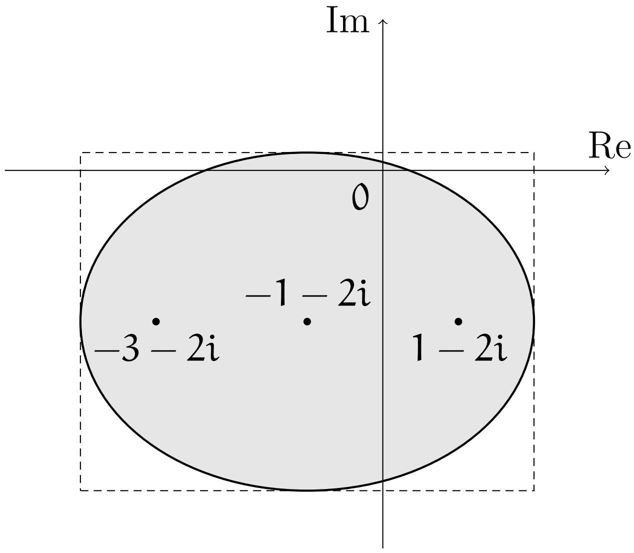
б) Введём обозначения: $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 - 2i$. Соотношение

$$|z - z_1| + |z - z_2| < 6$$

можно переписать в виде $d(z, z_1) + d(z, z_2) < 6$. Как известно из курса аналитической геометрии, условие $d(z, z_1) + d(z, z_2) = 2a$ задаёт эллипс с фокусами z_1, z_2 и большой полуосью a. Неравенство $d(z, z_1) + d(z, z_2) < 2a$ задаёт внутренность этого фокуса. Вычислим полуоси эллипса:

$$a = 3, \qquad c = |z_1 - z_2|/2 = 2, \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5} \approx 2,236.$$

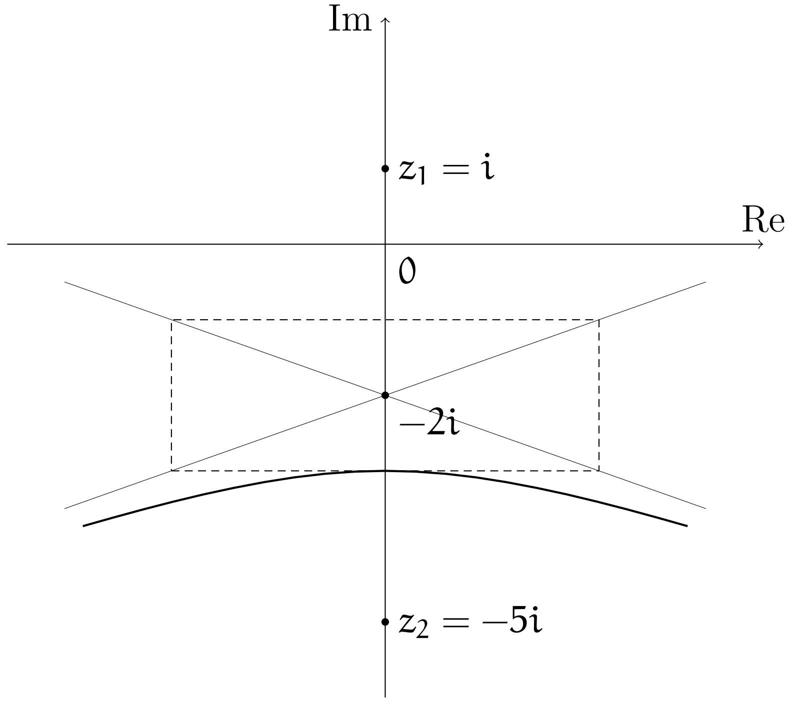
Центр эллипса расположен в точке $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = -1 - 2i$. Теперь можно сделать рисунок:



в) Пусть $z_1 = i$, $z_2 = -5i$. Уравнение $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$ можно переписать в виде $d(z, z_1) - d(z, z_2) = 2a$. Как известно из курса аналитической геометрии, условие $|d(z, z_1) - d(z, z_2)| = 2a$ задаёт гиперболу с фокусами z_1, z_2 и действительной полуосью a. В нашем случае получается только одна ветвь гиперболы, которая дальше от z_1 и ближе к z_2. Вычислим полуоси гиперболы:

$$a = 1, \qquad c = |z_1 - z_2|/2 = 3, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} = 2\sqrt{2} \approx 2,828.$$

Центр гиперболы находится в точке $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = -2i$. Теперь можно сделать рисунок:



□

$\boxed{\text{A8}}$ Доказать, что $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$ и $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \leqslant |z_1| \cdot |z_2|$.

Решение. Заметим, что числа $z_1\bar{z}_2$ и $\bar{z}_1 z_2$ — комплексно-сопряжённые:

$$\overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{\bar{z}}_2 = \bar{z}_1 \cdot z_2.$$

Обозначая $z_1\bar{z}_2$ через w, получим:

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = w + \bar{w} = 2\operatorname{Re}(w) = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

Далее воспользуемся формулами $\operatorname{Re}(w) \leqslant |w|$, $|\bar{z}| = |z|$ и $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$:

$$\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \leqslant |z_1\bar{z}_2| = |z_1| \cdot |\bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

□

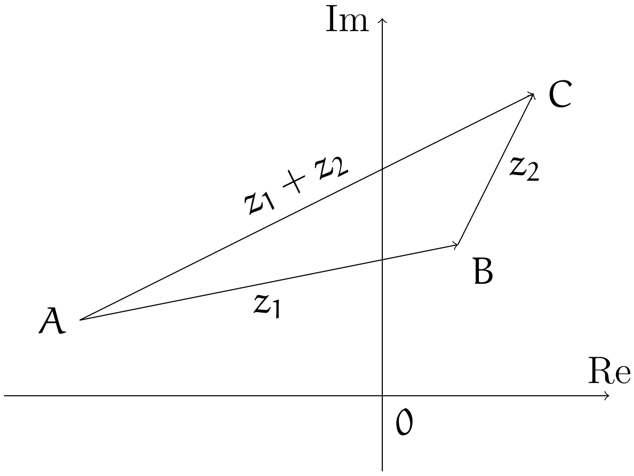
$\boxed{\text{A9}}$ Доказать *неравенство треугольника* (*полуаддитивность абсолютной величины*) и выяснить его геометрический смысл:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Решение. Докажем равносильное неравенство $|z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2$. Воспользуемся формулой $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, а затем — несколькими формулами, доказанными ранее:

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\bar z_1+\bar z_2) = \\ &= |z_1|^2 + z_1\cdot\bar z_2 + \bar z_1\cdot z_2 + |z_2|^2 = \\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar z_2) \leqslant \\ &\leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2.\end{aligned}$$

Геометрический смысл. Рассмотрим на плоскости произвольный треугольник ABC. Положим $z_1=\overrightarrow{AB}$, $z_2=\overrightarrow{BC}$. Тогда $\overrightarrow{AC}=z_1+z_2$.



Неравенство принимает вид

$$|\overrightarrow{AC}| \leqslant |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|.$$

Сторона треугольника не превосходит суммы двух других сторон. Равенство выполняется лишь в том случае, когда векторы $z_1=\overrightarrow{AB}$ и $z_2=\overrightarrow{BC}$ сонаправлены (при этом треугольник вырождается в отрезок). $\square$

$\boxed{\text{A10}}$ Доказать *тождество параллелограмма* и выяснить его геометрический смысл:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

Решение. Пользуясь формулами $|z|^2 = z\cdot\bar z$ и $z_1\bar z_2+\bar z_1 z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar z_2)$, вычислим отдельно слагаемые в левой части:

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= |z_1|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar z_2)+|z_2|^2;\\ |z_1-z_2|^2 &= |z_1|^2-2\,\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar z_2)+|z_2|^2.\end{aligned}$$

Складывая, получим нужную формулу. Выясним её геометрический смысл. Рассмотрим на плоскости произвольный параллелограмм $ABCD$. Обозначим через z_1 и z_2 векторы двух его смежных сторон:

$$z_1 = \overrightarrow{AB}, \qquad z_2 = \overrightarrow{AD}.$$

Тогда $z_1 + z_2$ и $z_1 - z_2$ — векторы диагоналей:

$$z_1 + z_2 = \overrightarrow{AC}, \qquad z_1 - z_2 = \overrightarrow{DB}.$$

Таким образом, тождество параллелограмма имеет следующий геометрический смысл: *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его сторон.* □