2-е занятие. Показательная форма комплексного числа Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел и записать эти числа в форме $z = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho \geqslant 0$ и $-\pi < \varphi \leqslant \pi$:

1) 1; 2) i; 3) -1; 4) $-i$;
5) $1+\sqrt{3}i$; 6) $1-\sqrt{3}i$; 7) $-1+\sqrt{3}i$; 8) $-1-\sqrt{3}i$;
9) $3+4i$; 10) $3-4i$; 11) $-3+4i$; 12) $-3-4i$.

$\boxed{\text{A2}}$ Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:

а) $\sin\varphi + i\cos\varphi \quad (-\pi < \varphi \leqslant \pi)$; б) $1+\cos\varphi + i\sin\varphi \quad (|\varphi| < \pi)$.

$\boxed{\text{A3}}$ Отметить на комплексной плоскости точки $z_1 = 1$, $z_2 = 3$, $z_3 = 2+i$ и $\omega_3 z_1$, $\omega_3 z_2$ и $\omega_3 z_3$, где $\omega_3 = e^{2\pi i/3}$.

$\boxed{\text{A4}}$ Вывести формулы для корней n-й степени из 1.

$\boxed{\text{A5}}$ Отметить на комплексной плоскости корни 6-й степени из единицы.

$\boxed{\text{A6}}$ Найти вершины правильного n-угольника с центром в точке 0, если известна одна из его вершин z_0.

$\boxed{\text{A7}}$ Выяснить геометрический смысл следующих соотношений:

1) $\arg z = -\dfrac{3\pi}{4}$. 2) $\arg(z+2-i) = \dfrac{\pi}{6}$.
3) $-\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$. 4) $\dfrac{\pi}{4} < \arg(z-1+2i) < \dfrac{3\pi}{4}$.

$\boxed{\text{A8}}$ Выяснить геометрический смысл следующих соотношений:

1) $\operatorname{Re}(iz) = 2$; 2) $\operatorname{Im}(e^{i\pi/3}z) = -1$; 3) $2 \leqslant \operatorname{Re}(iz) < 3$.

$\boxed{\text{A9}}$ Выяснить геометрический смысл следующих соотношений:

$$1)\ \operatorname{Im}\frac{z_1}{z_2} = 0. \qquad 2)\ \operatorname{Re}\frac{z_1}{z_2} = 0.$$

$\boxed{\text{A10}}$ Выяснить геометрический смысл следующих соотношений:

$$1)\ \operatorname{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2} = 0. \qquad 2)\ \operatorname{Re}\frac{z-2i}{z+2i} = 0.$$

Домашнее задание № 2
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{B 1.2}}$ Найти модули и аргументы комплексных чисел, записать их в показательной форме:

$$1)\ 3i; \quad 3)\ 1+i; \quad 5)\ 2+5i; \quad 7)\ -2+5i; \quad 9)\ bi\ (b \neq 0).$$

$\boxed{\text{A1}}$ Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:

$$\text{а)}\ \frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \text{б)}\ \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

$\boxed{\text{B 1.4, часть}}$ Используя тригонометрическую (или показательную) форму комплексного числа, найти все значения следующих корней и построить их:

$$2)\ \sqrt[3]{i}; \quad 4)\ \sqrt[6]{-8}; \quad 8)\ \sqrt[3]{-2+2i}.$$

Выяснить геометрический смысл следующих соотношений (описать словами и сделать эскизы):

$\boxed{\text{A2}}$ $\arg z = -\frac{\pi}{2}$. $\boxed{\text{A3}}$ $\arg(z-2-3i) = \frac{5\pi}{6}$.

$\boxed{\approx \text{B 1.29}}$ $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{6}$. $-\frac{\pi}{3} < \arg(z+2i) < \frac{2\pi}{3}$.

$\boxed{\text{B 1.28}}$ $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$.

$\boxed{\text{B 1.32. 2)}}$ $\operatorname{Re}\dfrac{z-z_1}{z-z_2} = 0$. Первый способ решения: сообразить, как связаны векторы $z-z_1$ и $z-z_2$. Второй способ решения: записать это соотношение через константы $z_3 = \frac{z_1+z_2}{2}$, $z_4 = \frac{z_2-z_1}{2}$ и переменную $w = z - z_3$.

$\boxed{\text{B 1.35, 2)}}$ $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = C \quad (C \in \mathbb{R})$. Рисунки для $C=4$, $C=-\frac{1}{4}$, $C=0$.

$\boxed{\text{B 1.36}}$ 1) $\operatorname{Re} z^2 = C$; 2) $\operatorname{Im} z^2 = C \quad (C \in \mathbb{R})$. Рисунок для $C=4$.

$\boxed{\text{B 1.40, 1)}}$ Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до точек заданной линии $(a>0)$: $\left|z+\frac{1}{z}\right| = a$.

$\boxed{\text{B 1.40, 2), конкрет.}}$ Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до точек заданной линии $(a>0)$: $\left|z+\frac{4}{z}\right| = 6$.

Конспект 2-го занятия. Показательная форма комплексного числа Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Аргумент комплексного числа: численные примеры

$\boxed{\text{A1}}$ Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:

1) 1;	2) i;	3) -1;	4) $-i$;
5) $1+\sqrt{3}i$;	6) $1-\sqrt{3}i$;	7) $-1+\sqrt{3}i$;	8) $-1-\sqrt{3}i$;
9) $3+4i$;	10) $3-4i$;	11) $-3+4i$;	12) $-3-4i$.

Решение. Напомним, что тригонометрической формой комплексного числа z называют представление z в виде

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (\rho \geqslant 0,\ \varphi \in \mathbb{R}).$$

Взяв модуль обеих частей, мы видим, что число ρ обязано совпадать с $|z|$. Итак, ρ есть *модуль* (*абсолютная величина*) z. Число φ называют *аргументом* или *углом* комплексного числа z. Если $z = 0$, то в качестве φ можно взять любое действительное число; если $z \neq 0$, то φ находится из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}; \\ \sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$$

с точностью до слагаемого, кратного 2π. Через $\operatorname{Arg} z$ будем обозначать множество всех значений аргумента; через $\arg z$ — то значение φ, которое принадлежит промежутку $(-\pi, \pi]$ (*главное значение аргумента*). $\operatorname{Arg} z$ легко выразить через $\arg z$:

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}.$$

Часто ради краткости жертвуют точностью и пишут без фигурных скобок:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

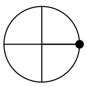
Пользуясь формулой Эйлера

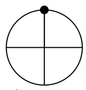
$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,}$$

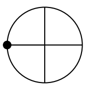
вместо тригонометрической формы $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно писать более краткую показательную форму $\rho e^{i\varphi}$. Формулу Эйлера можно доказывать разными способами; в нашем лекционном курсе она взята в качестве *определения* выражения $e^{i\varphi}$. С помощью формул косинуса и синуса суммы легко проверить, что для такой экспоненты с мнимым показателем выполняется *основное свойство экспоненты*:

$$e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}.$$

Если $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то через $\operatorname{Arg} z$ будем обозначать множество всех аргументов комплексного числа z; а через $\arg z$ — то значение аргумента, которое принадлежит промежутку $(-\pi, \pi]$.

1) $z = 1$.  $z = e^{i0}$; $|z| = 1$, $\arg z = 0$, $\operatorname{Arg} z = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

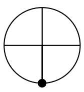
2) $z = i = 0 + 1i$.  $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\pi/2}$.
$|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

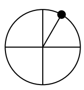
3) $z = -1$.  $z = e^{i\pi}$.
$|z| = 1$, $\arg z = \pi$, $\operatorname{Arg} z = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

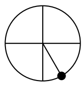
Лирическое отступление. Формулу $e^{i\pi} = -1$ часто называют *формулой Эйлера*. Можно переписать её в следующем виде:

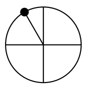
$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0.}$$

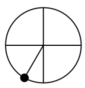
Из такой записи видно, что формула Эйлера связывает самые главные константы: $0, 1, e, \pi, i$.

4) $z = -i$.  $z = e^{-i\pi/2}$.

5) $z = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.  $z = 2e^{i\pi/3}$.

6) $z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.  $z = 2e^{-i\pi/3}$.

7) $z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.  $z = 2e^{2\pi/3}$.

8) $z = -1 - \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.  $z = 2e^{-2\pi/3}$.

9) $z = 3 + 4\mathrm{i}$. $|z| = \sqrt{9+16} = 5$. Выносим $|z|$ за скобку:

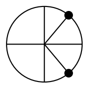
$$z = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\right).$$

Аргумент $\arg z = \varphi$ находим из системы:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{3}{5}; \\ \sin\varphi = \frac{4}{5}; \\ -\pi < \varphi \leqslant \pi. \end{cases}$$

Отсюда $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Есть и другие записи: $\arcsin\frac{4}{5}$, $\arccos\frac{3}{5}$. Итак,

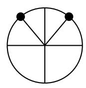
$$z = 5e^{\mathrm{i}\,\operatorname{arctg}\frac{(}{4}/3)}.$$

10) $z = 3 - 4\mathrm{i} = 5\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}\right)$.
Чтобы найти аргумент, удобно отметить на окружности вспомогательную точку в первой четверти:  Вспомогательная точка соответствует углу $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, а наша точка соответствует углу $-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Другими словами, φ находится из системы

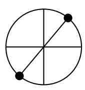
$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{3}{5}; \\ \sin\varphi = -\frac{4}{5}; \\ -\pi < \varphi \leqslant \pi. \end{cases}$$

Отсюда $\arg z = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $z = 5e^{-\mathrm{i}\,\operatorname{arctg}(4/3)}$.

11) $z = -3 + 4\mathrm{i} = 5\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\right)$.
Чтобы найти аргумент, удобно отметить на окружности вспомогательную точку в первой четверти:



Отсюда видно, что $\arg z = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $z = 5e^{\mathrm{i}(\pi - \operatorname{arctg}(4/3))}$.

12) $z = -3 - 4\mathrm{i} = 5\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}\right)$. 
$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $z = 5e^{\mathrm{i}(-\pi + \operatorname{arctg}(4/3))}$.

□

Аргумент комплексного числа: символьные примеры

$\boxed{\text{A2}}$ Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:

1) $\sin\varphi + i\cos\varphi \quad (-\pi < \varphi \leqslant \pi)$; 2) $1+\cos\varphi + i\sin\varphi \quad (|\varphi| < \pi)$.

Решение.

1) $z = \sin\varphi + i\cos\varphi \quad (-\pi < \varphi \leqslant \pi)$.
$|z| = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = 1$, поэтому осталось преобразовать z к виду $\cos\psi + i\sin\psi$. Для этого воспользуемся формулами приведения:
$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$
Мы нашли тригонометрическую форму числа z. Число $\frac{\pi}{2} - \varphi$ является *одним из аргументов* числа z, т. е. $\frac{\pi}{2} - \varphi \in \operatorname{Arg} z$. Чтобы найти главное значение аргумента, придётся рассмотреть два случая.
Если $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, то $\frac{\pi}{2} - \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, и в этом случае $\arg z = \frac{\pi}{2} - \varphi$.
Если $\varphi \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, то $\frac{\pi}{2} - \varphi \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Следовательно, в этом случае $\arg z = -2\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi = -\frac{3\pi}{2} - \varphi$.

2) $z = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (|\varphi| < \pi)$.
Ранее мы видели, что $|z| = 2\cos\frac{\varphi}{2}$. Этот результат подсказывает, что нужно переходить к половинному углу:
$$z = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} + i\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$
Здесь $\left|\frac{\varphi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$ и $\arg z = \frac{\varphi}{2}$.
Дополнительное задание: сделать рисунок и доказать полученные результаты ($|z| = 2\cos\frac{\varphi}{2}$, $\arg z = \frac{\varphi}{2}$) с помощью школьной планиметрии.

□

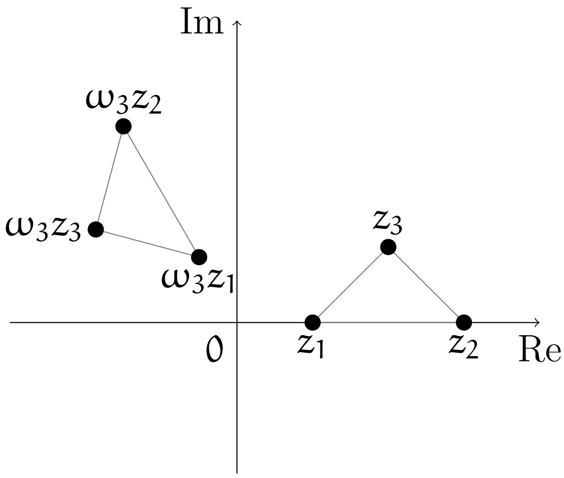
Умножение на комплексное число как поворот

$\boxed{\text{A3}}$ Отметить на комплексной плоскости точки $z_1 = 1$, $z_2 = 3$, $z_3 = 2 + i$ и $\omega_3 z_1$, $\omega_3 z_2$ и $\omega_3 z_3$, где $\omega_3 = e^{2\pi i/3}$.

Решение. Умножение на число $\omega_3 = e^{2\pi i/3}$ соответствует повороту комплексной плоскости на угол $\frac{2\pi}{3}$. Для проверки, можно вычислить $\omega_3 z_1$, $\omega_3 z_2$, $\omega_3 z_3$:

$$\begin{aligned} \omega_3 z_1 &= e^{2\pi i/3}; \\ \omega_3 z_2 &= 3e^{2\pi i/3}; \\ \omega_3 z_3 &= (2+i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \\ &= \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) i \approx -1{,}866 + 1{,}232 i. \end{aligned}$$

Отметим точки на комплексной плоскости:



□

Корни из единицы

$\boxed{\text{A4}}$ Вывести формулы для корней n-й степени из 1.

Решение. Нужно решить уравнение $z^n = 1$. Будем искать корни в виде $\rho e^{i\varphi}$. Тогда

$$\rho^n e^{ni\varphi} = 1 \cdot e^{0i}.$$

Если комплексные числа равны, то их модули равны: $\rho^n = 1$. Аргументы равных комплексных чисел обязаны совпадать с точностью до слагаемого, кратного 2π: $n\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда $\rho = 1$, $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$. Таким образом, корни n-й степени из 1 имеют вид $e^{2k\pi i/n}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Введём обозначение

$$\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}.}$$

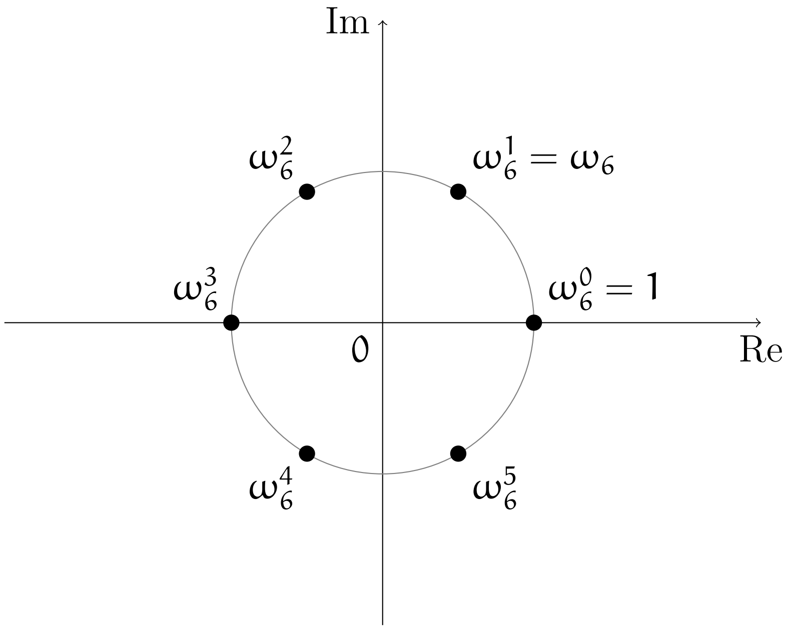
Используя это обозначение, корни n-й степени из 1 можно записать в виде ω_n^k, $k \in \mathbb{Z}$. Можно показать, что

$$\omega_n^{k_1} = \omega_n^{k_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad k_1 - k_2 \text{ делится на } n.$$

Поэтому числа $\omega_n^0, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^{n-1}$ попарно различны и образуют полный набор корней n-й степени из 1. $\square$

$\boxed{\text{A5}}$ Отметить на комплексной плоскости корни 6-й степени из единицы.

Решение. Отметим на единичной окружности числа ω_6^k, $0 \leqslant k < 6$:



$\square$

Запись вершин правильного многоугольника

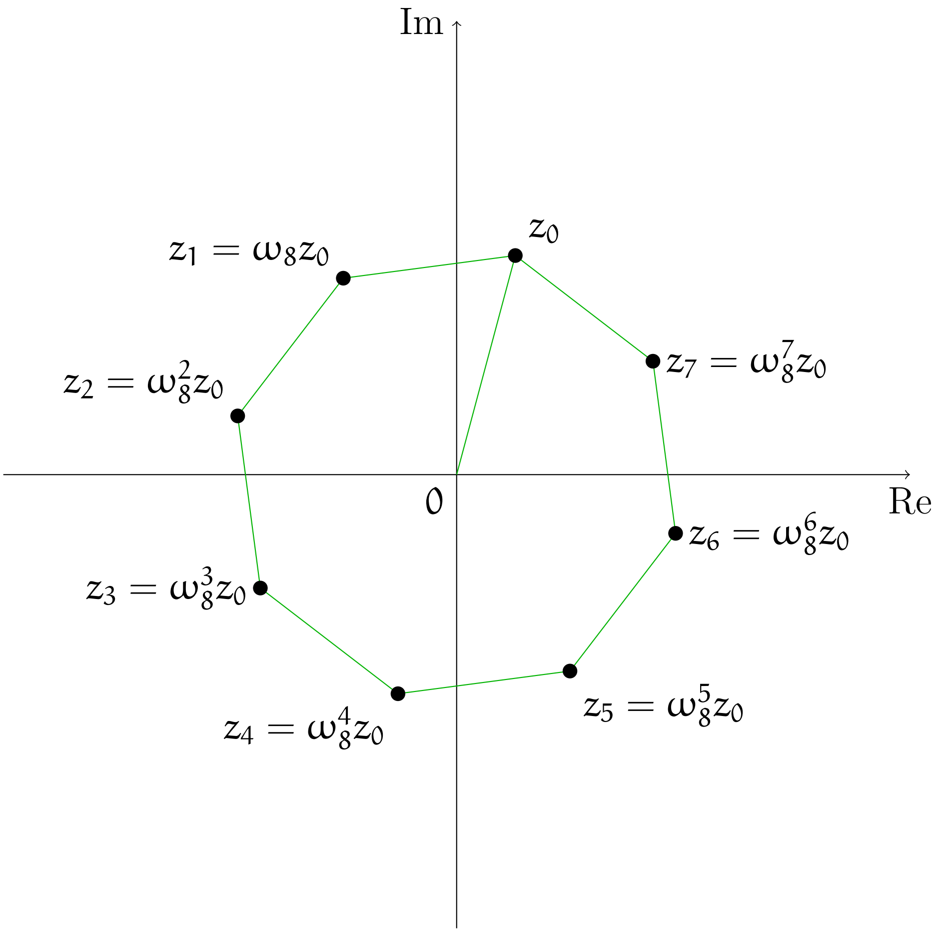
$\boxed{\text{A6}}$ Найти вершины правильного n-угольника с центром в точке 0, если известна одна из его вершин z_0.

Решение. По определению правильного n-угольника, его вершины расположены на одной окружности и делят эту окружность на n равных частей.

Пусть r — радиус окружности, φ_0 — аргумент точки z_0. Тогда аргументы других точек равны $\varphi_0 + \frac{2k\pi}{n}$, где $0 \leqslant k < n$. Итак, вершинами данного правильного n-угольника являются точки

$$z_k = re^{i\varphi_0 + i\frac{2k\pi}{n}} = re^{i\varphi_0} \cdot \left(e^{2i\pi/n}\right)^k = z_0\omega_n^k \qquad (0 \leqslant k < n).$$

Рисунок (для $n = 8$):



□

Геометрический смысл соотношений вида $\arg z = \alpha$

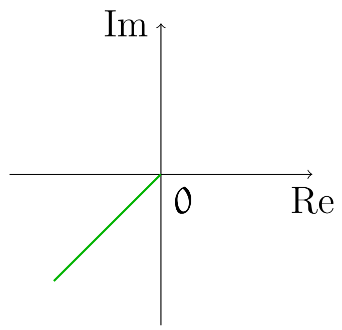
$\boxed{\text{A7}}$ Выяснить геометрический смысл следующих соотношений:

1) $\arg z = -\dfrac{3\pi}{4}$. 2) $\arg(z+2-i) = \dfrac{\pi}{6}$.

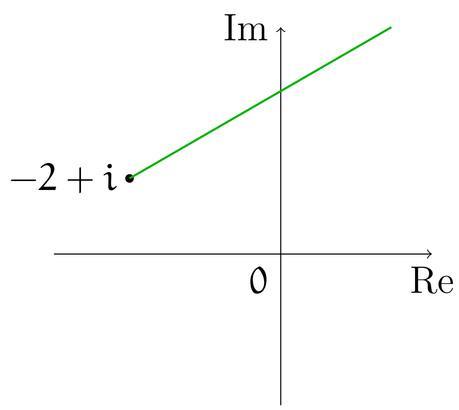
3) $-\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$. 4) $\dfrac{\pi}{4} < \arg(z-1+2i) < \dfrac{3\pi}{4}$.

Решение.

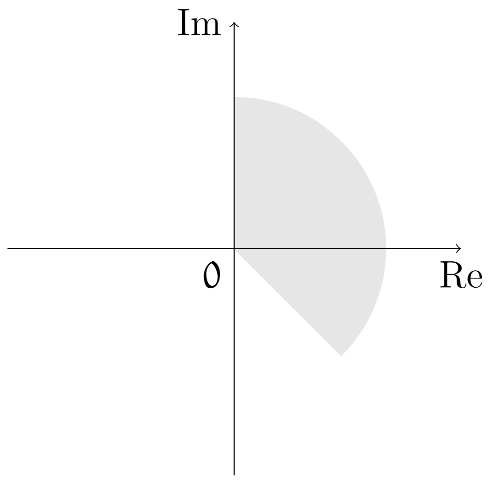
1) $\arg z = -\frac{3\pi}{4}$. Комплексные числа с аргументов $-\frac{3\pi}{4}$ образуют луч, направленный под углом $-\frac{3\pi}{4}$.



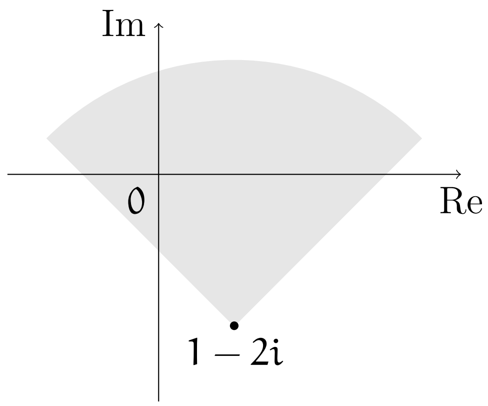
2) $\arg(z+2-i) = \frac{\pi}{6}$.
После замены $z+2-i = w$ получаем $\arg w = \frac{\pi}{6}$.
Точки w образуют луч, который идёт из 0 под углом $\frac{\pi}{6}$.
Переменная z выражается через w по формуле $z = (-2+i)+w$,
поэтому множество точек z получается переносом на вектор $-2+i$.



3) $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.
Бесконечный сектор, сторонами которого являются лучи, соответствующие углам $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$.



4) $\frac{\pi}{4} < \arg(z - 1 + 2i) < \frac{3\pi}{4}$.
Точки $w = z - 1 + 2i$ принадлежат бесконечному сектору с центром в точке 0, ограниченному лучами $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. Точки $z = w + 1 - 2i$ получаются сдвигом на вектор $1 - 2i$.



□

Геометрический смысл соотношений вида $\mathrm{Re}(e^{i\varphi}z) = a$

$\boxed{\text{A8}}$ Выяснить геометрический смысл следующих соотношений:

$$1)\ \mathrm{Re}(iz) = 2; \qquad 2)\ \mathrm{Im}(e^{i\pi/3}z) = -1; \qquad 3)\ 2 \leqslant \mathrm{Re}(iz) < 3.$$

Решение. Рассмотрим соотношение $\mathrm{Re}(e^{i\varphi}z) = a$, где $a > 0$. Положим $e^{i\varphi}z = w$. Точки w удовлетворяют условию $\mathrm{Re}(w) = a$, т. е. лежат на вертикальной прямой, проходящей через точку a. Перпендикуляр, опущенный из точки 0 на эту прямую, проходит под углом 0.

Переменная z выражается через переменную w по формуле $z = e^{-i\varphi}w$. *Это значит, что точки z получаются из точек w в результате поворота на угол $-\varphi$.* Множество таких точек образует прямую, которая находится на расстоянии a от точки 0, а перпендикуляр, опущенный из точки 0 на эту прямую, проходит под углом α.

Можно прийти к этому же выводу другим путём. Условие $\mathrm{Re}(e^{i\varphi}z) = a$ можно переписать в виде $x\cos\alpha - y\sin\alpha = a$, т. е.

$$x\cos(-\alpha) + y\sin(-\alpha) - a = 0.$$

Это нормальное уравнение прямой, для которой перпендикуляр, опущенный из начала координат, имеет длину a и направлен под углом $-\alpha$.

1) $\mathrm{Re}(iz) = 2$. Прямая, которая получается из прямой $\mathrm{Re}(w) = 2$ поворотом на угол $-\frac{\pi}{2}$. Можно сделать проверку через алгебраическую форму:

$$\mathrm{Re}(iz) = 2 \iff \mathrm{Re}(ix - y) = 2 \iff y = -2 \iff \mathrm{Im}(z) = -2.$$

2) $\mathrm{Im}(e^{i\pi/3}z) = -1$. Получается из прямой $\mathrm{Im}(w) = -1$ поворотом на угол $-\frac{\pi}{3}$.

3) $2 \leqslant \mathrm{Re}(iz) < 3$. Полоса, которая получается из полосы $2 \leqslant \mathrm{Re}(w) < 3$ поворотом на угол $-\frac{\pi}{2}$.

$\square$

Геометрический смысл соотношений $\operatorname{Re}\frac{z_1}{z_2}=0$ ***и*** $\operatorname{Im}\frac{z_1}{z_2}=0$

$\boxed{\text{A9}}$ Выяснить геометрический смысл следующих соотношений:

$$1)\ \operatorname{Im}\frac{z_1}{z_2}=0. \qquad 2)\ \operatorname{Re}\frac{z_1}{z_2}=0.$$

Решение. 1. Соотношение $\operatorname{Im}\frac{z_1}{z_2}=0$ означает, что $\frac{z_1}{z_2}=t$, где $t\in\mathbb{R}$. Это равносильно тому, что

$$z_2\neq 0 \qquad \wedge \qquad \exists t\in\mathbb{R}:\quad z_1=tz_2.$$

Отождествляя комплексные числа с векторами, можем сказать, что вектор z_2 ненулевой, а вектор z_1 ему коллинеарен:

$$\boxed{\operatorname{Im}\frac{z_1}{z_2}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad z_2\neq 0 \quad\wedge\quad z_1\parallel z_2.}$$

2. Рассмотрим соотношение $\operatorname{Re}\frac{z_1}{z_2}=0$:

$$\operatorname{Re}\frac{z_1}{z_2}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \exists t\in\mathbb{R}:\quad \frac{z_1}{z_2}=it \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} z_2\neq 0,\\ \exists t\in\mathbb{R}:\ z_1=itz_2; \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} z_2\neq 0,\\ z_1\parallel iz_2; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} z_2\neq 0,\\ z_1\perp z_2. \end{cases}$$

Вывод:

$$\boxed{\operatorname{Re}\frac{z_1}{z_2}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad z_2\neq 0 \quad\wedge\quad z_1\perp z_2.}$$

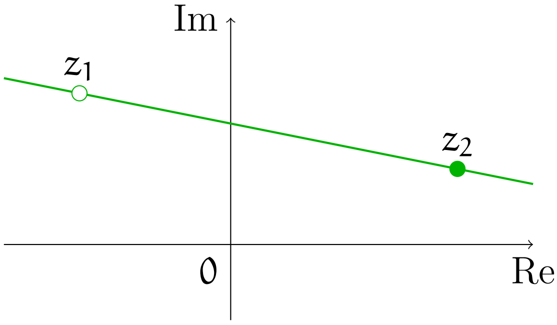
□

$\boxed{\text{A10}}$ Выяснить геометрический смысл следующих соотношений:

$$1)\ \operatorname{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0. \qquad 2)\ \operatorname{Re}\frac{z-2i}{z+2i}=0.$$

Решение.

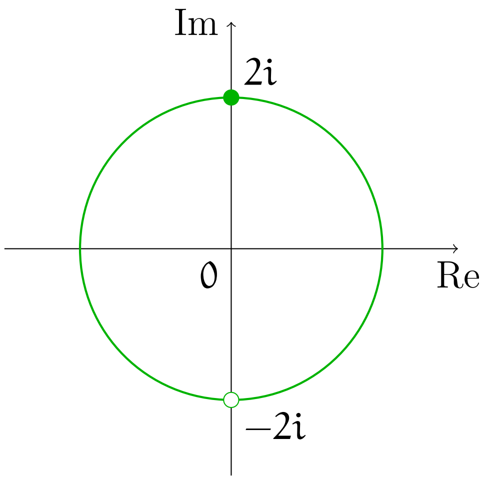
1) $\operatorname{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$. По доказанному ранее, это означает, что $z-z_1 \parallel z-z_2$ и $z-z_2\neq 0$. Это равносильно тому, что точка z лежит на прямой, соединяющей z_1 и z_2, причём не совпадает с z_2.



2) $\operatorname{Re}\frac{z-2i}{z+2i}=0$. По доказанному ранее, это равносильно системе

$$\begin{cases} z+2i\neq 0; \\ z-2i\perp z+2i. \end{cases}$$

Условие $z-2i\perp z+2i$ означает, что точки $z, 2i, -2i$ являются вершинами прямоугольного треугольника с прямым углом в вершине z. Как известно из школьной геометрии, z должна принадлежать окружности, у которой диаметр имеет концы $2i$ и $-2i$. При этом точка z не должна совпадать с $-2i$.



□