3-е занятие. Экспонента от комплексного числа, тригонометрические и гиперболические функции Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Изобразить на комплексной плоскости кривые, заданные следующими параметрическими уравнениями:

$$1)\ z(t) = e^{it} \quad (t \in [0, 2\pi]); \qquad 2)\ z(t) = e^{-it} \quad (t \in [0, 2\pi]);$$
$$3)\ z(t) = i - ie^{it} \quad (t \in [0, 2\pi]); \qquad 4)\ z(t) = te^{it} \quad (t \geqslant 0).$$

$\boxed{\approx 1.58}$ Из формулы $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ вывести, что:

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;
2. $e^{z+2\pi i} = e^z$;
3. Если $e^{z+\omega} = e^z$ при всяком z, то $\omega = 2\pi k i$, где $k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{1.60}$ Найти $e^{\pm\pi i/2}$, $e^{k\pi i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$\boxed{1.61}$ Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел e^{2+i}, e^{2-3i}, e^{3+4i}, e^{-3-4i}, $-ae^{i\varphi}$ $(a > 0,\ |\varphi| \leqslant \pi)$; $e^{-i\varphi}$ $(|\varphi| \leqslant \pi)$; $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ $(0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 2\pi)$.

$\boxed{1.62\text{: 3), 4)}}$ Найти суммы:

$$\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x, \quad \sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x.$$

Гиперболические и тригонометрические функции комплексной переменной определим следующими соотношениями:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$\boxed{\text{A2}}$ Выразить sin через sh. Выразить sh через sin.

$\boxed{\text{A3}}$ Выразить через тригонометрические и гиперболические функции действительного аргумента действительные и мнимые части, а также модули следующих функций:

$$1)\ e^{iz} \qquad 2)\ \sin z.$$

$\boxed{\text{A4}}$ Решить уравнение $e^z = w$, где w — данное комплексное число, z — неизвестная величина.

Домашнее задание № 3
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Выяснить геометрический смысл уравнения $\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z) = \beta$, где $\alpha = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $\beta \geqslant 0$.

$\boxed{\text{A2}}$ Представить уравнения следующих прямых в виде $\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z) = \beta$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, $\beta \geqslant 0$:

1) $x - y - 2 = 0$; 2) $3x - 4y - 2 = 0$; 3) $x + \sqrt{3}y + 6 = 0$.

$\boxed{\text{1.62: 1), 2)}}$ Найти суммы:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx, \qquad \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx.$$

$\boxed{\text{1.63}}$ Найти суммы:

1. $\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta)$;
2. $\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) + \ldots + \sin(\alpha + n\beta)$.

$\boxed{\text{1.64}}$ Исходя из определения соответствующих функций и свойств экспоненты, доказать:
1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; 2) $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$;
3) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;
4) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;
5) $\operatorname{tg} 2z = \dfrac{2\operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$; 6) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$.

$\boxed{\text{1.65}}$ Доказать, что если $\cos(z + \omega) = \cos z$ при всяком $z \in \mathbb{C}$, то $\omega = 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$\boxed{\text{1.66: 1), 2)}}$ Доказать, что $\sin iz = i \operatorname{sh} z$, $\cos iz = \operatorname{ch} z$.

$\boxed{\text{1.67: 2), 3)}}$ Выразить через тригонометрические и гиперболические функции действительного аргумента действительные и мнимые части, а также модули следующих функций: 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{tg} z$.

$\boxed{\text{1.68}}$ Найти действительные и мнимые части следующих значений функций:

1) $\cos(2 + i)$; 2) $\sin 2i$; 3) $\operatorname{tg}(2 - i)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - i\ln 2\right)$; 5) $\operatorname{cth}(2 + i)$; 6) $\operatorname{th}\left(\ln 3 + \dfrac{\pi i}{4}\right)$.

$\boxed{\text{1.71}}$ Вычислить: 1) $\mathrm{Ln}\, 4$, $\mathrm{Ln}(-1)$, $\ln(-1)$; 2) $\mathrm{Ln}\, i$, $\ln i$; 3) $\mathrm{Ln}\,\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$; 4) $\mathrm{Ln}(2 - 3i)$, $\mathrm{Ln}(-2 + 3i)$.

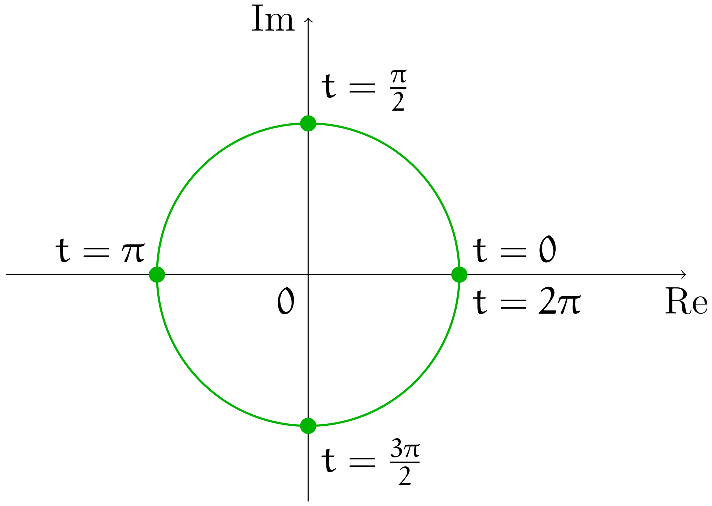
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
3-е занятие. Экспонента от комплексного числа, тригонометрические и гиперболические функции

$\boxed{\text{A1}}$ Изобразить на комплексной плоскости кривые, заданные следующими параметрическими уравнениями:

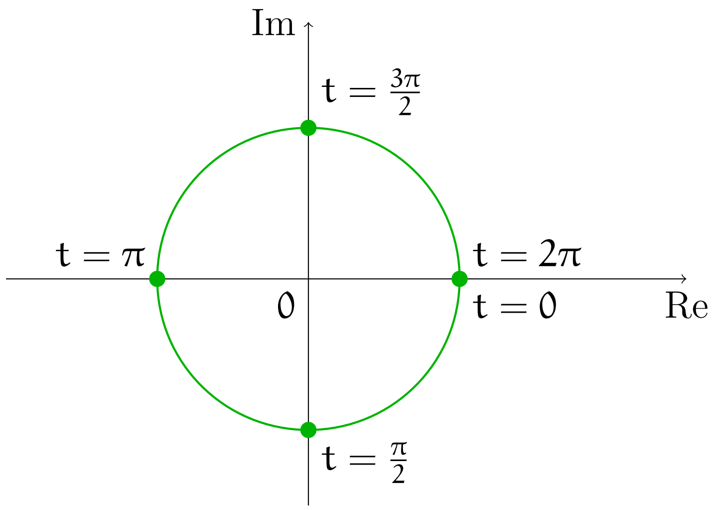
1) $z(t) = e^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$; 2) $z(t) = e^{-it} \quad (t \in [0, 2\pi])$;
3) $z(t) = i - ie^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$; 4) $z(t) = te^{it} \quad (t \geqslant 0)$.

Решение.

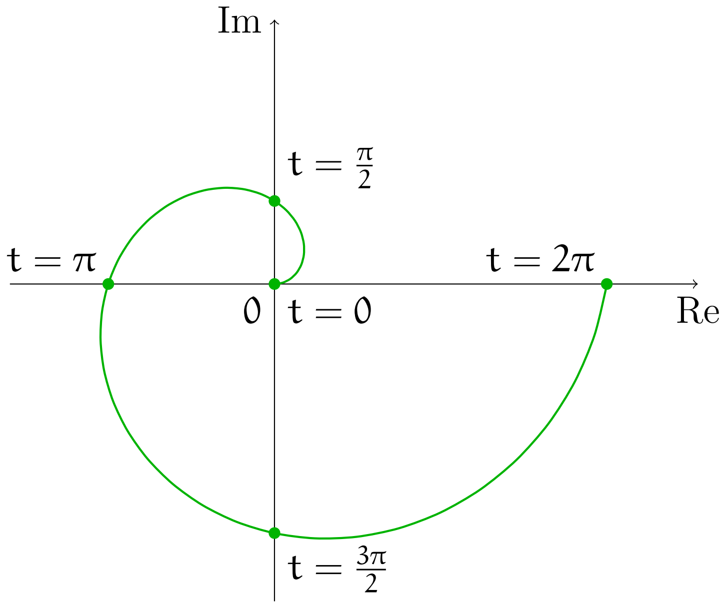
1) $z(t) = e^{it}$. Комплексное число e^{it} отображается точкой на единичной окружности, соответствующей углу t. Когда t изменяется от 0 до 2π, эта точка один раз пробегает окружность против часовой стрелки, начиная с точки $e^{i0} = 1$.



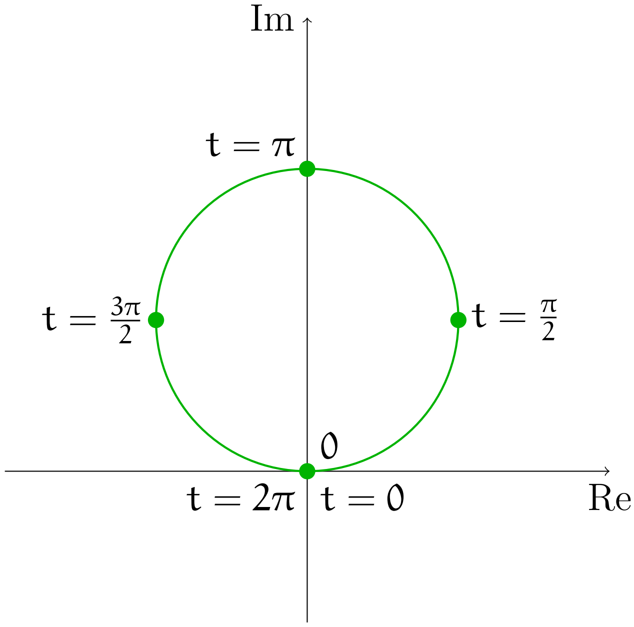
2) $z(t) = e^{-it}$. Единичная окружность, пробегаемая один раз против часовой стрелки:



3) $z(t) = te^{it}$. В полярной системе координат получим $\rho = t$, $\varphi = t$, т. е. $\rho = t$. Это спираль Архимеда. Для построения удобно отметить точки, соответствующие значениям параметра, кратным $\pi/2$:



4) $z(t) = i - ie^{it}$. Проще всего получить эту кривую из кривой $z_1(t) = e^{it}$. Умножение на $-i$ соответствует повороту на угол $-\frac{\pi}{2}$, так что при $t = 0$ получается точка $-i$; Прибавление i соответствует сдвигу на единицу вверх.



$\square$