5-е занятие. Параметрические уравнения кривых. Ряды с комплексными членами
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Повторение: аркфункции

A1 Доказать, что $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{i+z}{i-z} = \dfrac{1}{2i}\operatorname{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

A2 Вычислить: $\operatorname{Arsh}(i\sqrt{2})$, $\operatorname{Arctg}\sqrt{3}$, $\operatorname{Arctg}(1+2i)$.

B 1.82, 1) Решить уравнение: $\sin z + \cos z = 2$.

Линии, заданные параметрическими уравнениями

Определить линии, указанные следующими уравнениями:

B 1.109 $z = 1 - it$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

B 1.111 $z = t^2 + it^4$, $t \in \mathbb{R}$.

B 1.113 $z = t + \dfrac{i}{t}$, $-\infty < t < 0$.

B 1.114, 1) $z = t + i\sqrt{1-t^2}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

B 1.115 1) $z = a(t + i - ie^{-it})$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

B 1.116 Для отображения $w = z^2$ требуется:

1) найти образы линий $\operatorname{Re}(z) = C$, $\operatorname{Im}(z) = C$, $x = y$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ и выяснить, какие из них преобразуются взаимно однозначно;

2) найти прообразы (на z-плоскости) линий $\operatorname{Re}(w) = C$, $\operatorname{Im}(w) = C$.

Ряды с комплексными членами

Исследовать сходимость рядов $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$:

B 1.95 $c_n = \dfrac{n}{(2i)^n}$. B 1.97 $c_n = e^{in}$. B 1.99 $c_n = \dfrac{e^{in\varphi}}{n}$.

B 1.101 $c_n = \dfrac{1}{n}e^{\pi i/n}$. B 1.103 $c_n = \dfrac{\cos in}{2^n}$.

Домашнее задание № 5
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{В 1.78}}$ Доказать, что для любого значения $\operatorname{Arccos} z$ можно подобрать такое значение $\operatorname{Arcsin} z$, чтобы сумма этих значений была равна $\pi/2$. Доказать аналогичное утверждение для $\operatorname{Arctg} z$ и $\operatorname{Arcctg} z$.

$\boxed{\text{В 1.82}}$ Решить уравнения:

2) $\sin z - \cos z = 3$; 3) $\sin z - \cos z = i$; 4) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$.

Определить линии, заданные указанными уравнениями:

$\boxed{\text{В 1.110}}$ $z = t + it^2$, $-\infty < t < \infty$.

$\boxed{\text{В 1.112}}$ $z = a(\cos t + i \sin t)$, $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $a > 0$.

$\boxed{\text{В 1.114, 2)}}$ $z = -t + i\sqrt{1-t^2}$, $-1 \leqslant t < 0$ (берётся арифметическое значение корня).

$\boxed{\text{В 1.115, 2)}}$ $z = ia + at - ibe^{-it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$.

$\boxed{\text{В 1.117}}$ Для отображения $w = 1/z$ найти:

1) образы линий $\operatorname{Re}(z) = C$, $\operatorname{Re}(z) = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$, $|z-1| = 1$;

2) прообразы линий $\operatorname{Re}(w) = C$, $\operatorname{Im}(w) = C$.

$\boxed{\text{В 1.87}}$ Доказать формулу (преобразование Абеля):

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) - S_{m-1}b_m + S_n b_n,$$

где $1 \leqslant m \leqslant n$, $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ $(k \geqslant 1)$, $S_0 = 0$.

$\boxed{\text{В 1.88}}$ Доказать, что для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, где $b_n > 0$, достаточно, чтобы частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ были ограничены и последовательность чисел $\{b_n\}$ монотонно стремилась к 0 (признак Дирихле).

Исследовать сходимость рядов:

$\boxed{\text{В 1.96}}$ $c_n = \dfrac{n!}{(in)^n}$. $\boxed{\text{В 1.98}}$ $c_n = \dfrac{e^{in}}{n}$.

$\boxed{\text{В 1.100}}$ $c_n = \dfrac{e^{in}}{n^2}$. $\boxed{\text{В 1.104}}$ $c_n = \dfrac{n \sin in}{3^n}$.