6-е занятие. Образы линий отн. элементарных функций. Интегрирование по пути и по кривой
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{B 1.116}}$ Для отображения $w = z^2$ требуется:

1) найти образы линий $\mathrm{Re}(z) = C$, $\mathrm{Im}(z) = C$, $x = y$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ и выяснить, какие из них преобразуются взаимно однозначно;

2) найти на z-плоскости прообразы линий $\mathrm{Re}(w) = C$, $\mathrm{Im}(w) = C$.

$\boxed{\text{B 1.118: б}}$ Для отображения $w = z - \dfrac{1}{z}$ найти образы окружностей $|z| = R$.

$\boxed{\text{B 1.119: а}}$ Для отображения $w = z + \dfrac{1}{z}$ найти на z-плоскости прообраз линии $\mathrm{Re}(w) = C$.

Найти следующие интегралы по путям:

$\boxed{\text{A1}}$ $\displaystyle\int_\gamma z\,dz$, где $\gamma\colon z(t) = 2 + e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

$\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\int_\gamma (\bar z + 3z)|dz|$, где $\gamma\colon z(t) = 3 - 5it$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Интегрирование

$\boxed{\text{A3}}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int_\Gamma \bar z\,dz$, $\quad\Gamma\colon |z| = 1$, $\mathrm{Im}\,z \leqslant 0$ от 1 к -1.

$\boxed{\text{A4}}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int_\Gamma z\,|dz|$, $\quad\Gamma\colon |z| = 3$.

$\boxed{\text{B 3.3}}$ Вычислить интегралы $I_1 = \displaystyle\int x\,dz$ и $I_2 = \displaystyle\int y\,dz$ по следующим путям:

1) по радиусу-вектору точки $z = 2 + i$;

2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (начало пути — в точке $z = 1$);

3) по окружности $|z - a| = R$.

Домашнее задание № 6
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{В 1.117}}$ Для отображения $w = 1/z$ найти:

1) образы линий $\mathrm{Re}(z) = C$, $\mathrm{Re}(z) = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$, $|z-1| = 1$;
2) прообразы линий $\mathrm{Re}(w) = C$, $\mathrm{Im}(w) = C$.

$\boxed{\text{В 1.118: а}}$ Для отображения $w = z + \dfrac{1}{z}$ найти образы окружностей $|z| = R$.

$\boxed{\text{В 1.119: б}}$ Для отображения $w = z + \dfrac{1}{z}$ найти на z-плоскости прообраз линии $\mathrm{Im}(w) = C$.

Найти следующие интегралы по путям:

$\boxed{\text{А1}}$ $\displaystyle\int\limits_\gamma (\mathrm{Re}\, z + 2\,\mathrm{Im}\, z)\, dz$, где $\gamma\colon z(t) = -i + 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

$\boxed{\text{А2}}$ $\displaystyle\int\limits_\gamma z^3\,|dz|$, где $\gamma\colon z(t) = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

$\boxed{\text{В 3.1}}$ Пользуясь определением интеграла по кривой, доказать равенства:

$$\int\limits_\gamma dz = z_1 - z_0, \qquad \int\limits_\gamma z\, dz = \frac{1}{2}\left(z_1^2 - z_0^2\right).$$

Здесь γ — любой контур, соединяющий точки z_0 и z_1.

$\boxed{\text{В 3.4}}$ Вычислить интеграл $|z|\, dz$ по следующим путям:

1) по радиусу-вектору точки $z = 2 - i$;
2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$ (начало пути — в точке $z = -i$);
3) по окружности $|z| = R$.

$\boxed{\text{В 3.5}}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_C |z|\,\bar{z}\, dz$, где C — замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z| = 1$ и отрезка $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$.

$\boxed{\text{В 3.6}}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_C \frac{z}{\bar{z}}\, dz$, где C — граница полукольца

$$\{z \in \mathbb{C}\colon 1 < |z| < 2,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}.$$