8-е занятие. Условия Коши-Римана
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Пусть $f(x+yi) = u(x,y) + v(x,y)$, где $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
Тогда голоморфность функции f
(дифференцируемость по комплексному переменному $z = x + yi$)
равносильна системе следующих условий (Couchy-Riemann):

$$\boxed{u'_x = v'_y, \qquad u'_y = -v'_x.}$$

Если эти условия выполнены, то $f'(x+yi) = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y)$.

Проверка условий Коши-Римана и вычисление производных

$\boxed{\text{A1}}$ $f(z) = \bar{z}$. $\boxed{\text{A2}}$ $f(z) = z^3$. $\boxed{\text{A3}}$ $w(z) = \operatorname{ch} z$.

$\boxed{\text{A4}}$ $f(z) = \ln z$ ($z \neq 0$, $-\pi < \arg z < \pi$), где $\ln$ — главное значение логарифма.

Восстановление голоморфной функции по её действительной или мнимой части

$\boxed{\text{A5}}$ $\operatorname{Im}(f(x+yi)) = 3x^2y - y^3 + 2y$. $\boxed{\text{A6}}$ $\operatorname{Re}(f(x+yi)) = \operatorname{sh}(x)\sin(y)$.

$\boxed{\text{A7}}$ $\operatorname{Re}(f(x+yi)) = \dfrac{y}{x^2+y^2}, \qquad x^2+y^2 \neq 0.$

$\boxed{\text{A8}}$ $\operatorname{Im}(f(x+yi)) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 3x, \qquad x < 0.$

Простые примеры на интегральную теорему Коши

$\boxed{\text{B 3.20}}$ Показать, что если C — произвольный простой замкнутый контур, не проходящий через точку a, и $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\int_C (z-a)^n = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1,\ a \in \operatorname{int} C, \\ 0, & n = -1,\ a \in \operatorname{ext} C. \end{cases}$$

Здесь $\operatorname{int} C$ — внутренняя область контура C; $\operatorname{ext} C$ — внешняя область контура C.

$\boxed{\text{A9}}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^2+1}, \quad a > 1.$

Домашнее задание № 8
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Повторить доказательство условий Коши-Римана!

Для следующих функций проверить выполнение условий Коши-Римана и вычислить производные:

$\boxed{\text{A2}}$ $f(z) = z^2$. $\boxed{\text{A3}}$ $f(z) = \frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$.

$\boxed{\text{A4}}$ $f(x) = iz^3 - 5z$. $\boxed{\text{A5}}$ $f(x) = i\ln(z)$ $(z > 0)$.

$\boxed{\text{A6}}$ $f(z) = \cos z$. $\boxed{\text{A7}}$ $f(z) = \operatorname{sh} z$.

Найти голоморфную функцию f, если дана её действительная или мнимая часть:

$\boxed{\text{A8}}$ $\operatorname{Re}(f(x+yi)) = \frac{x}{x^2+y^2} + 3y - 2;$

$\boxed{\text{A9}}$ $\operatorname{Im}(f(x+yi)) = x^2 - y^2 + 7x;$

$\boxed{\text{A10}}$ $\operatorname{Re}(f(x+yi)) = \ln(x^2+y^2) + 3y \quad (x > 0);$

$\boxed{\text{A11}}$ $\operatorname{Im}(f(x+yi)) = \ln(x^2+y^2) + 3y \quad (x > 0);$

$\boxed{\text{A12}}$ $\operatorname{Re}(f(x+yi)) = \cos(x)\operatorname{ch}(y).$

$\boxed{\text{B 3.27}}$ Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{dz}{z^2+9}$, если:

1) точка $3i$ лежит внутри контура C, а точка $-3i$ — вне его;
2) точка $-3i$ лежит внутри контура C, а точка $3i$ — вне его;
3) точки $\pm 3i$ лежат внутри контура C.

Подсказка: разложить на элементарные дроби и воспользоваться результатом задачи 3.20.