9-е занятие. Интегральная теорема Коши. Радиус сходимости степенного ряда Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n \, dz.$$

Простые примеры на интегральную теорему Коши

$\boxed{\text{B 3.20}}$ Показать, что если C — произвольный простой замкнутый контур, не проходящий через точку a, и $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\int\limits_C (z-a)^n \, dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1,\ a \in \operatorname{int} C, \\ 0, & n = -1,\ a \in \operatorname{ext} C. \end{cases}$$

Здесь $\operatorname{int} C$ — внутренняя область контура C; $\operatorname{ext} C$ — внешняя область контура C.

$\boxed{\text{A2}}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^2+1}$, $a > 1$.

Радиус сходимости степенного ряда

Вычислить радиусы сходимости следующих степенных рядов:

$\boxed{\text{B 3.40}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. $\boxed{\text{B 3.41}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. $\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n^2} z^n$.

$\boxed{\text{B 3.46}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$. $\boxed{\text{B 3.47}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

$\boxed{\text{B 3.52}}$ Радиус сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равен R $(0 < R < +\infty)$. Определить радиусы сходимости рядов:

$$1а)\ \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^n; \qquad 2б)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n; \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n; \qquad 5)\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^k z^n.$$

Домашнее задание № 9
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{В 3.27}}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{z^2+9}$, если:

1) точка $3i$ лежит внутри контура C, а точка $-3i$ — вне его;
2) точка $-3i$ лежит внутри контура C, а точка $3i$ — вне его;
3) точки $\pm 3i$ лежат внутри контура C.

Подсказка: разложить на элементарные дроби и воспользоваться результатом задачи 3.20.

Вычислить радиусы сходимости следующих степенных рядов:

$\boxed{\text{В 3.42 (427)}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n.$

$\boxed{\text{В 3.43 (428)}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\, z^n.$

$\boxed{\text{В 3.44 (429)}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, z^n.$

$\boxed{\text{В 3.45 (430)}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$

$\boxed{\text{В 3.48 (433)}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n\, z^n.$

$\boxed{\text{В 3.49 (434)}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n.$

$\boxed{\text{В 3.50 (435)}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n.$

$\boxed{\text{В 3.52}}$ Радиус сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равен R $(0 < R < +\infty)$. Определить радиусы сходимости рядов:

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^n-1) z^n$; 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n c_n z^n$; 6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+z_0^n) c_n z^n.$

Конспект 9-го занятия.
Интегральная теорема Коши.
Радиус сходимости степенного ряда
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n \, dz.$$

Решение. Параметризуем окружность $|z-a| = r$ стандартным образом:

$$z(t) = a + re^{i\varphi}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Тогда $z(t) - a = re^{i\varphi}$, $dz(t) = rie^{i\varphi}$,

$$I = r^{n+1} \cdot i \cdot \int\limits_0^{2\pi} e^{(n+1)i\varphi} \, d\varphi.$$

Если $n = -1$, то $I = 2\pi i$. Если $n \neq -1$, то

$$I = r^{n+1} \cdot i \cdot \frac{1}{(n+1)i} \cdot e^{(n+1)i\varphi}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

□

Интегральная теорема Коши

$\boxed{\text{B 3.20}}$ Показать, что если C — произвольный простой замкнутый контур, не проходящий через точку a, и $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\int\limits_C (z-a)^n \, dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1, \ a \in \operatorname{int} C, \\ 0, & n = -1, \ a \in \operatorname{ext} C. \end{cases}$$

Здесь $\operatorname{int} C$ — внутренняя область контура C; $\operatorname{ext} C$ — внешняя область контура C.

Решение. Если $a \in \operatorname{ext} C$, то функция $(z-a)^n$ голоморфна внутри C, и по интегральной теореме Коши интеграл равен 0. Если $a \in \operatorname{int} C$, то из интегральной теоремы Коши следует, что интеграл по C можно заменить интегралом по достаточно малой окружности, проходящей вокруг точки a. В предыдущей задаче было показано, что такой интеграл равен $2\pi i$ при $n = -1$ и равен 0 при $n \neq -1$. $\square$

$\boxed{\text{A2}}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^2+1}, \quad a > 1.$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}.$$

Внутрь контура $|z-a| = a$ попадает только точка i, поэтому второе слагаемое голоморфно внутри C, и интеграл от него равен нулю. А интеграл от первого слагаемого равен

$$\frac{1}{2}\int\limits_C \frac{dz}{z-i} = \frac{1}{2}\int\limits_{|z-i|=\delta} \frac{dz}{z-i} = pii.$$

$\square$

Радиус сходимости степенного ряда

Формула Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

$\boxed{3.40}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$

Решение. Здесь $|a_n| = 1/n$, $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$, $R = 1$. $\square$

$\boxed{3.41}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$

Решение. 1-й способ — использовать формулу Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n^n}{e^n}\cdot e^{\theta(n)}, \quad \text{где} \quad \theta(n) \to 0.$$

Отсюда $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$, $R = +\infty$.

2-й способ — использовать формулу Даламбера (которая работает не всегда):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Эта формула применима лишь в тех случаях, когда предел справа существует. В нашем случае он существует и равен 0. □

$\boxed{3.46}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}.$

Решение. Здесь $a_n = 2^k$ при $n = k!$, $a_n = 0$ при остальных k. При вычислении верхнего предела можно рассмотреть только подпоследовательность $n = k!$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} = \lim_{k\to\infty} (2^k)^{1/k!} = \lim_{k\to\infty} 2^(k/k!) = 1.$$

Вывод: $R = 1$. □

$\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n^2}\, z^n.$

Решение. Разбиваем на две подпоследовательности и получаем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 3.$$

Отсюда $R = 1/3$. □