10-е занятие. Степенные ряды. Вторая теорема Абеля Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть $f(z) = \ln(1+z)$, где $|z| < 1$, $\ln$ — главное значение логарифма. Найти $f'(z)$.

Просуммировать при $|z| < 1$ следующие ряды:

$$\boxed{\text{A2}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)z^n. \qquad \boxed{\text{B 3.54, 2)}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}. \qquad \boxed{\text{B 3.54, 3)}} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Исследовать поведение степенного ряда на границе круга сходимости:

$$\boxed{\text{B 3.56}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}. \qquad \boxed{\text{B 3.57}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}. \qquad \boxed{\text{B 3.60}} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}.$$

Повторим формулы для главного значения логарифма.

$\boxed{\text{A3}}$ В этой задаче через $\ln z$ обозначено главное значение $\operatorname{Ln} z$. Найти:

1) $\ln z$ для $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$ и $-\pi < \varphi \leqslant \pi$;

2) $\operatorname{Re}(\ln z)$ для $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$;

3) $\operatorname{Re}(\ln z)$ для $z = r(\sin\varphi + i\cos\varphi)$, где $r > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$.

Вторая теорема Абеля: если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится, то

$$\lim_{r\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

$\boxed{\text{B 3.63}}$ Пользуясь второй теоремой Абеля и решением задачи 3.54, доказать следующие равенства:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|, \quad \text{где } 0 < |\varphi| \leqslant \pi.$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\pi - \varphi}{2}, \quad \text{где } 0 < \varphi < 2\pi.$$

Разложить указанные функции в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и найти радиус сходимости:

$\boxed{\text{A4}}$ $\exp z$. $\qquad \boxed{\text{B 3.67}}$ $\operatorname{ch} z$. $\qquad \boxed{\text{B 3.69}}$ $\sin^2 z$.

Домашнее задание № 10
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{В 3.54}}$ Просуммировать при $|z| < 1$ следующие ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} nz^n; \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}.$$

Исследовать поведение степенного ряда на границе круга сходимости:

$\boxed{\text{В 3.55}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n.$ $\boxed{\text{В 3.58}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n.$ $\boxed{\text{В 3.61 (доп.)}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}.$

$\boxed{\text{В 3.59}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{pn}}{n}$, где $p \in \mathbb{N}$. (Рассмотреть $p = 2$, $p = 3$.)

$\boxed{\text{В 3.63}}$ Пользуясь второй теоремой Абеля и решением задачи 3.54, доказать следующие равенства:

$$3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right|, \quad \text{где} \quad 0 < |\varphi| < \pi.$$

$$4)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{где} \quad 0 < \varphi < \pi.$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n\varphi}{n} = \ln \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad \text{где} \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

$$6)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\varphi}{2}, \quad \text{где} \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

Разложить указанные функции в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и найти радиус сходимости:

$\boxed{\text{В 3.68}}$ $\operatorname{sh} z$. $\boxed{\text{В 3.70}}$ $\operatorname{ch}^2 z$.

$\boxed{\text{В 3.73}}$ $\dfrac{1}{az+b}$ $(b \neq 0)$. $\boxed{\text{В 3.74}}$ $\dfrac{z}{z^2 - 4z + 13}$.

Конспект 10-го занятия.
Степенные ряды. Вторая теорема Абеля
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть $f(z) = \ln(1+z)$, где $|z| < 1$, $\ln$ — главное значение логарифма. Найти $f'(z)$.

Решение. Ранее мы видели, что

$$\ln(x+yi) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad (x > 0),$$

и выводили отсюда, что $(\ln(z))' = \frac{1}{z}$ при $\mathrm{Re}(z) > 0$. Если $|z| < 1$, то $\mathrm{Re}(z) > -1$ и $\mathrm{Re}(1+z) > 0$, поэтому можно применить формулу $(\ln(z))' = \frac{1}{z}$ и формулу для производной суперпозиции. В результате получим, что

$$(\ln(1+z))' = \frac{1}{1+z}.$$

□

Для решения следующих примеров нужно хорошо знать формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1).$$

Просуммировать при $|z| < 1$ следующие ряды:

$\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)z^n.$

Решение. Рассмотрим ряд

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+2} = \frac{z^2}{1-z}.$$

Тогда

$$S(z) = \frac{A'(z)}{z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{2z(1-z)+z^2}{(1-z)^2} = \frac{2-z}{(1-z)^2}.$$

□

$\boxed{\text{3.54, 2)}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}.$

Решение. Обозначим наш ряд через $S(z)$. Тогда

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Как мы видели в одном из предыдущих упражнений, $(\ln(1+z))' = \frac{1}{1+z}$ при $|z| < 1$. Следовательно, $(\ln(1-z))' = -\frac{1}{1-z}$. Поэтому $S(z) = -\frac{1}{1-z} + C$. Константу C находим из условия $S(0) = 0$. Получим $C = 0$. □

$\boxed{3.54,\ 3)}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

Решение. Обозначим исходный ряд через $S(z)$. Тогда

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}.$$

Покажем, что это производная от функции

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}.$$

Действительно,

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1-|z|^2+2i\operatorname{Im} z}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2}.$$

Поэтому $\operatorname{Re}\dfrac{1+z}{1-z} = \dfrac{1-|z|^2}{1+|z|^2-2\operatorname{Re} z} > 0$ при $|z| < 1$.

Следовательно, можно применить формулу для производной от $\ln z$ при $\operatorname{Re}(z) > 0$. Получим:

$$\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-z}{1+z} \cdot \frac{2}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z^2}.$$

Отсюда

$$S(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} + C.$$

Находим C, подставляя $z = 0$: $0 = C$. □

Исследовать поведение степенного ряда на границе круга сходимости:

$\boxed{3.56}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Решение. Здесь $R = 1$. На границе круга сходимости, т. е. при $|z| = 1$, мы можем записать z в виде $z = e^{i\varphi}$, где $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, и ряд будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}.$$

Видно, что ряд из абсолютных величин расходится. При $\varphi = 0$ также получаем расходящийся гармонический ряд. При остальных φ работает признак Дирихле, так как $1/n \searrow 0$ и

$$\left| \sum_{n=1}^{m} e^{in\varphi} \right| = \frac{|e^{i\varphi} - e^{i(m+1)\varphi}|}{|1 - e^{i\varphi}|} \leqslant \frac{2}{|1 - e^{i\varphi}|},$$

где правая часть не зависит от n. □

$\boxed{3.57}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

Решение. $R = 1$. При $|z| = 1$ ряд сходится абсолютно. □

$\boxed{3.60}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}$.

Решение. Здесь

$$|a_k| = \begin{cases} 1/\ln n, & k = 3n - 1; \\ 0, & \text{при остальных } k. \end{cases}$$

При вычислении верхнего предела можно рассматривать только подпоследовательность $k = 3n - 1$:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = 1.$$

Для нахождения предела воспользовались оценками $\ln 2 \leqslant \ln n \leqslant n$ и теоремой о пределе зажатой последовательности.

При $z = e^{i\varphi}$, где $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{i(3n-1)\varphi}}{\ln n} = \frac{1}{e^{i\varphi}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{i(3\varphi+\pi)n}}{\ln n}.$$

Если $\varphi \in \{-\pi/3, \pi/3, \pi\}$, то общий член ряда принимает вид $1/\ln n$, и ряд расходится. Для остальных φ ряд сходится по признаку Дирихле. □

Повторим формулы для главного значения логарифма.

$\boxed{\text{A3}}$ В этой задаче через $\ln z$ обозначено главное значение $\operatorname{Ln} z$. Найти:

1) $\ln z$ для $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$ и $-\pi < \varphi \leqslant \pi$;

2) $\operatorname{Re}(\ln z)$ для $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$;

3) $\operatorname{Re}(\ln z)$ для $z = r(\sin\varphi + i\cos\varphi)$, где $r > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$.

Решение. Главное значение логарифма определяется формулой

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,$$

где $\arg z$ — главное значение аргумента.

1. Здесь $|z| = r$, $\arg z = \varphi$, поэтому $\ln z = \ln r + i\varphi$.

2. Здесь мы сразу не можем указать главного значения аргумента (оно зависит от того, какому промежутку принадлежит φ), но это и не требуется. Найдём $|z|$:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r.$$

Отсюда $\operatorname{Re}(\ln z) = \ln r$.

3. Аналогично, $|z| = r$, $\operatorname{Re}(\ln z) = \ln r$. $\square$

Вторая теорема Абеля: если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится, то

$$\lim_{r\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

$\boxed{3.63}$ Пользуясь второй теоремой Абеля и решением задачи 3.54, доказать следующие равенства:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|,$ где $0 < |\varphi| \leqslant \pi$).

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\pi - \varphi}{2},$ где $0 < \varphi < 2\pi$.

Решение. Как уже показали, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ сходится при $|z| < 1$, и его сумма равна $-\ln(1-z)$, где $\ln$ обозначает главное значение логарифма. Далее, ряды 1) и 2) представляют собой действительную и мнимую части этого ряда при $z = e^{i\varphi}$, и при указанных значениях φ они сходятся. Следовательно, по признаку Абеля, мы можем находить суммы этих рядов как предельные значения функции $-\ln(1-z)$.

1. Если $z = e^{i\varphi}$, где $\varphi \in (0, 2\pi)$, то

$$\begin{aligned} 1 - z &= 1 - \cos\varphi - i\sin\varphi = \\ &= 2\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \\ &= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi-\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi-\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Здесь $\frac{\varphi}{2} \in (0, \pi)$, поэтому $\sin\frac{\varphi}{2} \geqslant 0$ и $\frac{\varphi-\pi}{2} \in (-\pi/2, \pi/2)$. Следовательно, $|1 - z| = 2\sin\frac{\varphi}{2}$ и главное значение аргумента $(1 - z)$ равно $\frac{\varphi-\pi}{2}$. Отсюда находим главное значение логарифма:

$$-\ln(1 - e^{i\varphi}) = -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right| + i\frac{\pi-\varphi}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{Im}(-\ln(1 - e^{i\varphi})) = \frac{\pi-\varphi}{2} \qquad \text{при} \qquad \varphi \in (0, 2\pi),$$

что и требовалось доказать.

2. Теперь $0 < |\varphi| < \pi$. Как и раньше,

$$1 - z = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi-\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi-\pi}{2}\right),$$

но теперь нельзя утверждать, что $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$. Рассуждаем по-другому: из основного тригонометрического тождества следует, что абсолютная величина большой скобки равна 1. Следовательно, $|1 - z| = \left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|$, и

$$\operatorname{Re}(-\ln(1 - e^{i\varphi})) = -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

□