

12-е занятие. Ряды Тейлора

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

A1 Выразить через \exp и \ln функцию $\sqrt{}$ («главное значение квадратного корня»), определённую следующим образом:

$$\sqrt{\rho e^{i\varphi}} = \sqrt{\rho} \cdot e^{\frac{i\varphi}{2}} \quad (\rho > 0, \quad -\pi < \varphi \leq \pi).$$

A2 Показать, что функция $\frac{\sin z}{z}$, доопределённая в точке 0 предельным значением, аналитична на всей комплексной плоскости. Найти её ряд Тейлора.

Разложить функции в ряд Тейлора по степеням z :

B 3.81 $\int_0^z \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi.$

A3 $f(z) = \sqrt{1+z}$. (Выписать разложение до z^4 .)

A4 $f(z)$ — непрерывная ветвь $\operatorname{Arcsin} z$, для которой $f(0) = 0$.

Разложить по степеням $(z-1)$ и найти радиус сходимости:

B 3.82 $f(z) = \frac{z}{z+2}.$

Вычисление коэффициентов композиции и частного

Найти первые пять членов разложения в ряд по степеням z :

B 3.88 $e^{z \sin z}.$

\approx **B 3.89** $\sqrt{\cos z}.$

A5 $\frac{z}{e^z - 1}.$

B 3.100 Доказать, что если разложение функции $\frac{z}{e^z - 1}$ в ряд по степеням z записать в виде $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$, то числа B_n (числа Бернулли) удовлетворяют соотношениям

$$B_0 = 1, \quad \binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n = 0.$$

Домашнее задание № 12

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Найти разложение в ряд Тейлора:

В 3.78 $f(z)$ — непрерывная ветвь $\operatorname{Arsh} z$, для которой $f(0) = 0$.

В 3.72 $f(z)$ — непрерывная ветвь $\sqrt{z+i}$, для которой $f(0) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

В 3.80 $\int_0^z e^{\xi^2} d\xi$.

Разложить функции по степеням $(z-1)$ и найти радиус сходимости:

В 3.83 $\frac{z}{z^2 - 2z + 5}$.

В 3.86 $\ln z$, где \ln — главное значение логарифма.

Вычисление коэффициентов композиции и частного

Найти первые пять членов разложения в ряд по степеням z :

В 3.90 $f(z) = e^{z \ln(1+z)}$, где \ln — главное значение логарифма.

В 3.91 $f(z) = \exp(\exp(z))$.

В 3.92 $f(z) = \exp(z) \cdot \ln(1+z)$.

≈ В 3.103 1) $\ln \frac{\sin z}{z}$; 2) $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$; 3) $\ln \cos z$; 4) $\frac{z}{\sin z}$.

Рекуррентные соотношения для коэффициентов

В 3.104 Доказать, что коэффициенты c_n разложения

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

удовлетворяют соотношению $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ ($n \geq 0$). Разложить функцию в сумму элементарных дробей, найти c_n и радиус сходимости ряда. Использовать обозначения:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \hat{\varphi} = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$