13-е занятие. Частное и суперпозиция степенных рядов. Ряды Лорана для рациональных функций Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Вычисление коэффициентов композиции и частного

Найти первые пять членов разложения в ряд по степеням z:

$\boxed{\approx \text{B } 3.89}$ $\operatorname{sqrt}(\cos z)$, где sqrt — главное значение квадратного корня.

$\boxed{\text{A1}}$ $\dfrac{z}{e^z - 1}$.

Рекуррентные соотношения для коэффициентов ряда Тейлора

$\boxed{\text{B } 3.100}$ Доказать, что если разложение функции $\frac{z}{e^z-1}$ в ряд по степеням z записать в виде $\dfrac{z}{e^z - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$, то числа B_n (*числа Бернулли*) удовлетворяют соотношениям

$$B_0 = 1, \qquad \binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \ldots + \binom{n+1}{n} B_n = 0.$$

Ряды Лорана

Разложить функцию в ряд Лорана:

$\boxed{\text{A2}}$ $\dfrac{1}{z+3i}$ в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$.

$\boxed{\text{A3}}$ $\dfrac{1}{(z-3)^2}$ в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$.

$\boxed{\text{A4}}$ $\dfrac{1}{z(z+2i)}$ в окрестности точек $z = 0$, $z = -2i$ и $z = \infty$.

$\boxed{\text{A5}}$ $\dfrac{1}{(z+2)(z-5)}$ в кольце $2 < |z| < 5$.

Домашнее задание № 13
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Вычисление коэффициентов композиции и частного

Найти первые пять членов разложения в ряд по степеням z:

$\boxed{\text{В 3.90}}$ $f(z) = e^{z\ln(1+z)}$, где ln — главное значение логарифма.

$\boxed{\text{В 3.91}}$ $f(z) = \exp(\exp(z))$.

$\boxed{\text{В 3.92}}$ $f(z) = \exp(z) \cdot \ln(1+z)$.

$\boxed{\approx \text{В 3.103}}$ 1) $\ln\dfrac{\sin z}{z}$; 2) $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$; 3) $\ln\cos z$; 4) $\dfrac{z}{\sin z}$.

Рекуррентные соотношения для коэффициентов

$\boxed{\text{В 3.104}}$ Доказать, что коэффициенты c_n разложения

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

удовлетворяют соотношению $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ $(n \geqslant 0)$. Разложить функцию в сумму элементарных дробей, найти c_n и радиус сходимости ряда. Использовать обозначения:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \hat{\varphi} = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ряды Лорана

$\boxed{\text{В 4.1}}$ $\dfrac{1}{z-2}$ в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$.

$\boxed{\text{В 4.2}}$ $\dfrac{1}{(z-a)^k}$ $(a \neq 0,\ k \in \mathbb{N})$ в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$.

$\boxed{\text{В 4.3}}$ $\dfrac{1}{z(1-z)}$ в окрестности точек $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$.

$\boxed{\text{В 4.4}}$ $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0 < |a| < |b|)$ в окрестности точек $z = 0$, $z = a$, $z = \infty$ и в кольце $|a| < |z| < |b|$.

Конспект 13-го занятия.
Частное и суперпозиция степенных рядов.
Ряды Лорана для рациональных функций
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Вычисление коэффициентов композиции и частного

$\boxed{\approx \text{В } 3.89}$ Найти первые пять членов разложения в ряд по степеням z:

$$f(z) = \operatorname{sqrt}(\cos z),$$

где sqrt — главное значение квадратного корня.

Решение. Подразумевается, что нужно найти разложение до z^4. Ранее мы находили первые члены разложения функции $\operatorname{sqrt}(1+t)$:

$$\operatorname{sqrt}(1+t) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5t^4}{128} + \dots$$

Вместо t нужно подставить функцию $\cos z - 1$:

$$t = \cos z - 1 = -\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots;$$
$$t^2 = \frac{z^4}{4} + \dots$$

Очевидно, разложения следующих степеней t начинаются с членов более высокого порядка, чем x^4. Поэтому

$$\operatorname{sqrt}(\cos(z)) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots\right) - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{z^4}{4} + \dots\right) + \dots$$

Находим коэффициенты при степенях z:

$$z^0\colon\ 1;$$
$$z^2\colon\ -\frac{1}{4};$$
$$z^4\colon\ \frac{1}{48} - \frac{1}{32} = -\frac{1}{96}.$$

Ответ: $\operatorname{sqrt}(\cos(z)) = 1 - \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{z^4}{96} + \dots$ □

$\boxed{\text{A1}}$ Найти первые пять членов разложения в ряд по степеням z:

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Решение. Заметим, что разложение знаменателя начинается с первой степени z^1, поэтому числитель и знаменатель можно сократить на z. Чтобы в результате получить разложение до z^4, нужно сначала разложить e^z до z^5:

$$\frac{z}{1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \ldots - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \frac{z^4}{120} + \ldots}.$$

Записываем разложение искомую функцию $f(z)$ по степеням z до z^4 с неопределёнными коэффициентами:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots$$

Неопределённые коэффициенты будем находить из равенства

$$1 = \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \frac{z^4}{120} + \ldots\right) \cdot \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots\right).$$

Приравниваем коэффициенты при степенях z и последовательно находим из них a_k:

$$\begin{aligned}
&z^0\colon 1 = a_0; && a_0 = 1;\\
&z^1\colon 0 = a_1 + \frac{a_0}{2}; && a_1 = -\frac{1}{2};\\
&z^2\colon 0 = a_2 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{6}; && a_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12};\\
&z^3\colon 0 = a_3 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{24}; && a_3 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = 0;\\
&z^4\colon 0 = a_4 + \frac{a_3}{2} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_1}{24} + \frac{a_0}{120}. && a_4 = 0 - \frac{1}{72} + \frac{1}{48} - \frac{1}{120} = \frac{1}{720}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\dfrac{z}{e^z - 1} = 1 - \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{12} - \dfrac{z^4}{720} + \ldots$ □

Рекуррентные соотношения для коэффициентов ряда Тейлора

$\boxed{\text{В 3.100}}$ Доказать, что если разложение функции $\frac{z}{e^z-1}$ в ряд по степеням z записать в виде $\dfrac{z}{e^z-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$, то числа B_n (*числа Бернулли*) удовлетворяют соотношениям

$$B_0 = 1, \qquad \binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \ldots + \binom{n+1}{n} B_n = 0.$$

Решение. Заметим, что

$$\frac{z}{e^z-1} = \frac{z}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}}.$$

Теперь из формулы $\dfrac{z}{e^z-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} z^j$ получаем:

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j z^j}{j!} \right).$$

Рассмотрим произведение, записанное в правой части равенства. Коэффициент при z^0 равен B_0. Отсюда $B_0 = 1$.

Найдём коэффициент при z^n, где $n \geqslant 1$. Заметим, что z^n будет получаться при перемножении степеней, сумма которых равна n. Поэтому коэффициент в правой части при z^n равен

$$\sum_{(j,k):\, j+k=n} \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{B_j}{j!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{B_j}{j! \cdot ((n+1-j)!}.$$

В левой части коэффициент при z^n, где $n \geqslant 1$, равен 0. Отсюда

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{B_j}{j! \cdot ((n+1-j)!} = 0.$$

Умножим обе части на $(n+1)!$. Тогда коэффициент при B_j будет равен

$$\frac{(n+1)!}{j! \cdot (n+1-j)!} = \binom{n+1}{j}.$$

Это и требовалось доказать. $\square$

Ряды Лорана

$\boxed{\text{A2}}$ Разложить функцию в ряд:

$$f(z) = \frac{1}{z+3i}, \qquad \text{в окрестности точек} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = \infty.$$

Решение.

1. Фраза *разложить в окрестности* 0 означает, что нужно разложить по степеням z (предполагается, что величина $|z|$ достаточно мала):

   $$\frac{1}{z+3i} = \frac{1}{3i \cdot \left(1 + \frac{z}{3i}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{(3i)^n}.$$

   Круг сходимости: $|z| < |3i| = 3$.

2. Фраза *разложить в окрестности* ∞ означает, что нужно разложить по степеням $\frac{1}{z}$ (в предположении, что величина $\frac{1}{|z|}$ достаточно мала). Выражаем функцию через $\frac{1}{z}$ и пользуемся формулой суммы геометрической прогрессии:

   $$\frac{1}{z+3i} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1+\frac{3i}{z}}{=}\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3i)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3i)^n}{z^{n+1}}.$$

   Ряд сходится при $\left|\frac{3i}{z}\right| < 1$, т. е. при $|z| > 3$.

$\square$

Для решения следующей задачи нам понадобится формула

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n.$$

$\boxed{\text{A3}}$ Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$:

$$\frac{1}{(z-3)^2}.$$

Решение.

1. Разложим функцию по степеням z:

$$\frac{1}{(z-3)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\frac{z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}\cdot z^n.$$

   Круг сходимости: $|z| < 3$.

2. Разложим функцию по степеням $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{(z-3)^2} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{3}{z}\right)^2} = \frac{1}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\frac{3^n}{z^n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{z^{n+2}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)\cdot 3^{n-2}}{z^n}.$$

   Ряд сходится при $\left|\frac{3}{z}\right| < 1$, т. е. при $|z| > 3$.

□

$\boxed{\text{A4}}$ $\dfrac{1}{z(z+2i)}$ в окрестности точек $z=0$, $z=-2i$ и $z=\infty$.

Решение.

1. Разложим функцию по степеням z:

$$\frac{1}{z(z+2i)} = \frac{1}{2iz}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2i}} = \frac{1}{2iz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(2i)^{n+1}} = \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{z^n}{(2i)^{n+2}}.$$

Ряд сходится при $|z|<2$.

2. Чтобы разложить функцию по степеням $(z+2i)$, удобно сделать замену $t=z+2i$:

$$\frac{1}{z(z+2i)} = \frac{1}{(t-2i)t} = -\frac{1}{2it}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2i}} = -\frac{1}{2it}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(2i)^n} =$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(2i)^{n+1}} = -\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{t^n}{(2i)^{n+2}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{(2i)^{n+2}}.$$

Ряд сходится при $|t|<2$, т. е. в круге $|z+2i|<2$.

3. Разложим функцию по степеням $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z(z+2i)} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2i}{z}} = \frac{1}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{z^n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{z^{n+2}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2i)^{n-2}}{z^n}.$$

Ряд сходится при $\left|-\frac{2i}{z}\right|<1$, т. е. при $|z|>2$.

□

$\boxed{\text{A5}}$ Разложить функцию $\dfrac{1}{(z+2)(z-5)}$ в кольце $2 < |z| < 5$.

Решение. Центром кольца является точка 0. Это значит, что функцию нужно разложить по положительным и отрицательным степеням z. Сначала разложим функцию на элементарные дроби:

$$\frac{1}{(z+2)(z-5)} = \frac{1}{7}\frac{1}{z-5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{z+2}.$$

Поскольку $|z| < 5$, то дробь $\frac{1}{z-5}$ раскладываем по степеням $\frac{z}{5}$:

$$\frac{1}{z-5} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1-\frac{z}{5}}{=} - \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{5^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{5^{n+1}}.$$

Далее, поскольку $|z| > 2$, то дробь $\frac{1}{z+2}$ раскладываем по степеням $-\frac{2}{z}$:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{z^n}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{(z+2)(z-5)} = -\dfrac{1}{7}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{5^{n+1}} - \frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{z^n}$. $\square$