15-е занятие. Ряды Лорана
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Разложить функции в ряды Лорана в окрестностях указанных точек (возможно, в проколотых окрестностях) или в указанных кольцах.

$\boxed{\text{A1}}$ $\dfrac{1}{(z+2)(z-5)}$ в кольце $2 < |z| < 5$.

$\boxed{\text{A2}}$ $\dfrac{1}{(z^2+16)^2}$ в окрестности точек $-4i$ и ∞.

$\boxed{\text{A3}}$ $\dfrac{z+3}{(z+1)(z^2+4)}$ в окрестности точки -1 и в кольце $1 < |z| < 2$.

$\boxed{\text{A4}}$ $z\cos\dfrac{1}{z+2}$ в окрестности точки -2.

$\boxed{\text{A5}}$ $\sin\dfrac{z+3}{z-1}$ в окрестности точки 1.

$\boxed{\text{A6}}$ $e^{2z+\frac{1}{z}}$ в области $0 < |z| < \infty$.

$\boxed{\text{A7}}$ $\cos z\,\cos\dfrac{1}{z}$ в области $0 < |z| < \infty$.

$\boxed{\text{A8}}$ $\ln\dfrac{z+2}{z-3}$ в окрестности точки ∞.

Домашнее задание № 15
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Разложить функции в ряды Лорана в окрестностях указанных точек (возможно, в проколотых окрестностях) или в указанных кольцах.

$\boxed{\text{B 4.4}}$ $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0<|a|<|b|)$ в окрестности точек $z=0$, $z=a$, $z=\infty$ и в кольце $|a|<|z|<|b|$.

$\boxed{\text{B 4.5}}$ $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ в окрестности точки 2 и в кольце $1<|z|<2$.

$\boxed{\text{B 4.6}}$ $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ в окрестности точек i и ∞.

$\boxed{\text{B 4.9}}$ $z^2e^{1/z}$ в окрестности точек 0 и ∞.

$\boxed{\text{B 4.10, } z_0=1}$ $e^{1/(1-z)}$ в окрестности точки 1.

$\boxed{\text{*B 4.10, } z_0=\infty}$ $e^{1/(1-z)}$ в окрестности точки ∞.

$\boxed{\text{B 4.11}}$ $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ в окрестности точки 2.

$\boxed{\text{B 4.12}}$ $z^2\sin\dfrac{1}{z-1}$ в окрестности точки 1.

$\boxed{\text{B 4.13}}$ $e^{z+1/z}$ в области $0<|z|<\infty$.

$\boxed{\text{B 4.14}}$ $\sin z\sin\dfrac{1}{z}$ в области $0<|z|<\infty$.

$\boxed{\text{B 4.15, } z_0=1}$ $\sin\dfrac{z}{1-z}$ в окрестности точки 1.

$\boxed{\text{B 4.17}}$ $\ln\dfrac{z-a}{z-b}$ в окрестности точки ∞.

$\boxed{\text{B 4.18, } z_0=\infty}$ $\dfrac{1}{z-2}\ln\dfrac{z-i}{z+i}$ в окрестности точки ∞.

Конспект 15-го занятия.
Ряды Лорана
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Напомним, что для разложения дробей в степенные ряды нужно знать следующие формулы:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n; \tag{1}$$

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n. \tag{2}$$

Разложить функции в ряды Лорана в окрестностях указанных точек (возможно, в проколотых окрестностях) или в указанных кольцах.

$\boxed{\text{A1}}$ $\dfrac{1}{(z+2)(z-5)}$ в кольце $2 < |z| < 5$.

Решение. Сначала разложим функцию на элементарные дроби:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-5)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{z-5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{z+2}.$$

При разложении элементарной дроби $\frac{1}{z-5}$ нужно учесть, что $|z| < 5$. Поэтому в знаменателе выносим за скобку число -5 и применяем формулу геометрической прогрессии (1) для $t = \frac{z}{5}$:

$$\frac{1}{z-5} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{5}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{5^{n+1}}.$$

Полученный ряд сходится при $|z| < 5$.

При разложении элементарной дроби $\frac{1}{z+2}$ нужно учесть, что $|z| > 2$. Поэтому в знаменателе выносим за скобку z и применяем формулу геометрической прогрессии (1) для $t = -\frac{2}{z}$:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{z^n}.$$

Полученный ряд сходится при $|z| > 2$.

Складывая два разложения, получим ряд Лорана, который сходится при $2 < |z| < 5$.

Ответ: $f(z) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{5^{n+1}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^{n-1}}{z^n}, \qquad 2 < |z| < 5.$ $\square$

$\boxed{\text{A2}}$ $\dfrac{1}{(z^2+16)^2}$ в окрестности точек $-4i$ и ∞.

Решение.

1. $z_0 = -4i$. Разложим знаменатель на линейные сомножители и сделаем замену $t = z + 4i$:

$$\frac{1}{(z^2+16)^2} = \frac{1}{(z+4i)^2(z-4i)^2} = \frac{1}{t^2(t-8i)^2}.$$

Теперь раскладываем по степеням t, используя формулу (2):

$$\frac{1}{t^2}\cdot\frac{-1}{64}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{it}{8}\right)^2} = -\frac{1}{64t^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot(-i)^n t^n}{8^n} = -\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(n+3)t^n}{8^{n+4}}.$$

Ряд сходится при $0 < |t| < 8$.

2. $z_0 = \infty$.

$$\frac{1}{(z^2+16)^2} = \frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{16}{z^2}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot(-1)^n\cdot 16^n}{z^{2n+4}} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}\cdot 16^{n-1}}{z^{2n}}.$$

Ряд сходится при $|z| > 4$.

Ответ:

$$f(z) = -\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(n+3)(z+4i)^n}{8^{n+4}}, \qquad 0 < |z+4i| < 8;$$
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}\cdot 16^{n-1}}{z^{2n}}, \qquad |z| > 4.$$

□

$\boxed{\text{А3}}$ $\dfrac{z+3}{(z+1)(z^2+4)}$ в окрестности точки -1 и в кольце $1<|z|<2$.

Решение.

1. $z_0=-1$. Сделаем замену $t=z+1$ $(z=t-1)$:

$$f(z)=\frac{t+2}{t(t-1+2i)(t-1-2i)}.$$

Разложим рациональную функцию $\frac{t+2}{(t-1+2i)(t-1-2i)}$ на элементарные дроби методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{t+2}{(t-1+2i)(t-1-2i)}=\frac{A}{t-1+2i}+\frac{B}{t-1-2i}.$$

Находим коэффициенты A и B:

$$A=\left(\frac{t+2}{t-1-2i}\right)\bigg|_{t=1-2i}=\frac{3-2i}{-4i}=\frac{2+3i}{4},$$
$$B=\left(\frac{t+2}{t-1+2i}\right)\bigg|_{t=1+2i}=\frac{3+2i}{4i}=\frac{2-3i}{4}.$$

Итак,

$$f(z)=\frac{1}{4t}\cdot\left(\frac{2+3i}{t-1-2i}+\frac{2-3i}{t-1+2i}\right).$$

Раскладываем элементарные дроби по степеням t:

$$f(z)=\frac{1}{4t}\cdot\left(\frac{2+3i}{1+2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(1+2i)^n}+\frac{2-3i}{1-2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(1-2i)^n}\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+3i)(1-2i)^{n+1}+(2-3i)(1+2i)^{n+1}}{4\cdot 5^{n+1}}\cdot t^{n-1}=$$
$$=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(2+3i)(1-2i)^{n+2}+(2-3i)(1+2i)^{n+2}}{4\cdot 5^{n+2}}\cdot t^{n}.$$

Ряд сходится при $0<|t|<\sqrt{5}$.

2. Разложим функцию в кольце $1<|z|<2$. Сначала представим функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{z+3}{(z+1)(z^2+4)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2i}+\frac{C}{z+2i}.$$

Находим коэффициенты A, B, C:

$$A = \left(\frac{z+3}{z^2+4}\right)\Bigg|_{z=-1} = \frac{2}{5};$$
$$B = \left(\frac{z+3}{(z+1)(z+2i)}\right)\Bigg|_{z=2i} = \frac{3+2i}{(1+2i)\cdot 4i} = -\frac{4+7i}{20};$$
$$C = \left(\frac{z+3}{(z+1)(z-2i)}\right)\Bigg|_{z=-2i} = \frac{3-2i}{(1-2i)\cdot(-4i)} = -\frac{4-7i}{20}.$$

При разложении дроби $\frac{1}{z+1}$ учитываем, что $|z| > 1$:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}.$$

При разложении дробей $\frac{1}{z-2i}$ и $\frac{1}{z+2i}$ учитываем, что $|z| < 2$:

$$\frac{1}{z+2i} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-2i)^{n+1}}, \qquad \frac{1}{z-2i} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2i)^{n+1}}.$$

Ответ: при $0 < |z+1| < \sqrt{5}$:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(2+3i)(1-2i)^{n+2} + (2-3i)(1+2i)^{n+2}}{4\cdot 5^{n+2}}\cdot(z+1)^n;$$

при $1 < |z| < 2$:

$$f(z) = \frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} - \frac{1}{20}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4+7i)(2i)^{n+1} + (4-7i)(-2i)^{n+1}}{4^{n+1}}z^n.$$

$\square$

$\boxed{\text{A4}}$ $z\cos\dfrac{1}{z+2}$ в окрестности точки -2.

Решение. Сделаем замену $t = z+2$. Тогда

$$f(z) = (t-2)\cdot\cos\frac{1}{t} = (t-2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\cdot t^{2n}} =$$
$$= -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\cdot t^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\cdot t^{2n-1}}.$$

Ряд сходится при $0 < |t| < +\infty$.

Ответ: $f(z) = -2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\cdot(z+2)^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\cdot(z+2)^{2n-1}}$. $\square$

$\boxed{\text{A5}}$ $\sin\dfrac{z+3}{z-1}$ в окрестности точки 1.

Решение. Сделаем замену $t = z-1$ $(z = t+1)$ и воспользуемся формулой синуса суммы:

$$f(z) = \sin\frac{t+4}{t} = \sin\left(1+\frac{4}{t}\right) = \sin(1)\cdot\cos\frac{4}{t} + \cos(1)\cdot\sin\frac{4}{t}.$$

Раскладываем $\cos\frac{4}{t}$ и $\sin\frac{4}{t}$:

$$f(z) = \sin(1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!\cdot t^{2n}} + \cos(1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot t^{2n+1}}.$$

Ответ:

$$f(z) = \sin(1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!\cdot(z-1)^{2n}} + \cos(1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot(z-1)^{2n+1}}.$$

$\square$

$\boxed{\text{A6}}$ $e^{2z+\frac{1}{z}}$ в области $0 < |z| < \infty$.

Решение. Воспользуемся основным свойством экспоненты: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$. В нашем случае получим:

$$e^{2z+\frac{1}{z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m \cdot z^m}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k}.$$

Первый ряд абсолютно сходится при любом $z \in \mathbb{C}$; второй ряд — при любом $z \neq 0$. Поэтому их произведение будет абсолютно сходиться при любом $z \neq 0$.

Коэффициент при z^n, где $n \in \mathbb{Z}$, равен

$$c_n = \sum_{(m,k):\ m\geqslant 0,\ k\geqslant 0,\ m-k=n} \frac{2^m}{m!k!}. = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{n+k}}{(n+k)!k!}.$$

Удобно разделить случаи $n \geqslant 0$ и $n = -p$, где $p > 0$. Если $n \geqslant 0$, то

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{n+k}}{(n+k)!k!}.$$

Если $n < 0$, то

$$c_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!(m-n)!}.$$

Ответ: $f(z) = \sum\limits_{n=0} c_n z^n$, где

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{n+k}}{(n+k)!k!} \quad \text{при} \quad n \geqslant 0; \qquad c_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!(m-n)!} \quad \text{при} \quad n < 0.$$

□

$\boxed{\text{A7}}$ $\cos z \, \cos \dfrac{1}{z}$ в области $0 < |z| < \infty$.

Решение. Разложим $\cos z$ и $\cos \frac{1}{z}$, а затем перемножим ряды:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)! \cdot z^{2k}}.$$

Найдём коэффициент при z^{2n} $(n \in \mathbb{Z})$ в произведении:

$$c_n = \sum_{(m,k):\; m \geqslant 0,\; k \geqslant 0,\; m-k=n} \frac{1}{(2m)! \cdot (2k)!}.$$

Если $n \geqslant 0$, то

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2n)! \cdot (2k)!}.$$

Если $n < 0$, то

$$c_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)! \cdot (2m-2n)!}.$$

Очевидно, $c_n = c_{-n}$.

Ответ: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$, где $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2n)! \cdot (2k)!}$. $\square$

$\boxed{\text{A8}}$ $\ln\dfrac{z+2}{z-3}$ в окрестности точки ∞.

Решение. Поскольку величина $|z|$ предполагается большой, то следует выносить за скобку z в числителе и знаменателе дроби $\frac{z+2}{z-3}$:

$$f(z) = \ln\frac{z+2}{z-3} = \ln\frac{1+\frac{2}{z}}{1-\frac{3}{z}} = \ln\left(1+\frac{2}{z}\right) - \ln\left(1-\frac{3}{z}\right).$$

Дальше можно воспользовать известным разложением функции $\ln(1+t)$ в окрестности нуля:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}.$$

В результате получаем:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n - 3^n}{n}\cdot z^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot t^n.$$

Вычислим радиус сходимости:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}} = 3.$$

Итак, разложение верно при $|t| < \frac{1}{3}$, т. е. при $|z| > 3$.

Ответ: $f(z) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot z^{-n}$. $\square$