# 16-е занятие. Изолированные особые точки однозначного характера (ИОТОХ) Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

A1 Разложить функцию $\ln \dfrac{z+2}{z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $\infty$.

### *Корни и кратности*

Говорят, что $z_0$ есть *корень кратности* $k$ голоморфной функции $f$, если $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, где $g$ голоморфна и $g(z_0) \neq 0$. Это равносильно тому, что $f^{(n)}(z_0) = 0$ при $n < k$ и $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Определить кратность корня $z_0$ функции $f$:

A2 $f(z) = \sin z$, $z_0 = \pi$.

A3 $f(z) = \cos z - 1$, $z_0 = 0$.

A4 $f(z) = \exp z$, $z_0 = 3$.

### *Классификация ИОТОХ*

Найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функций на бесконечности.

B 4.23 $\dfrac{1}{z - z^3}$.

B 4.25 $\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$.

A5 $e^{1/z}$.

A6 $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\sin z}$.

B 4.29 $ze^{-z}$.

B 4.31 $\dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$.

B 4.35 $e^{-1/z^2}$.

# Домашнее задание № 16
# Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Разложить функции в ряды Лорана:

$\boxed{\text{B 4.17}}$ $\ln\dfrac{z-a}{z-b}$ в окрестности точки $\infty$.

$\boxed{\text{B 4.18}}$ $\dfrac{1}{z-2}\ln\dfrac{z-i}{z+i}$ в окрестности точки $\infty$ и в кольце $1<|z|<2$.

По лекциям и учебникам повторить определение кратности корня и классификацию ИОТОХ!

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi$ и $\psi$ аналитичны в некоторой окрестности точки $z_0$, причём $z_0$ является корнем кратности $m$ функции $\varphi$ и корнем кратности $n$ функции $\psi$. Доказать, что при $m\geqslant n$ точка $z_0$ будет корнем кратности $m-n$ функции $f$, а при $m<n$ точка $z_0$ будет полюсом кратности $n-m$ функции $f$.

Найти кратность корня $z_0$ заданной функции:

$\boxed{\text{A2}}$ $z^3-2z^2+z$, $z_0=1$. $\boxed{\text{A3}}$ $e^z-1-z$, $z_0=0$.

$\boxed{\text{A4}}$ $\operatorname{tg} z-\sin z$, $z_0=0$. $\boxed{\text{A5}}$ $\exp(z)-1$, $z_0=2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функций на бесконечности:

$\boxed{\text{B 4.24 (566)}}$ $\dfrac{z^4}{1+z^4}$. $\boxed{\text{B 4.26 (568)}}$ $\dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$.

$\boxed{\text{B 4.28 (570)}}$ $\dfrac{z^2+1}{e^z}$. $\boxed{\text{B 4.30 (572)}}$ $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$.

$\boxed{\text{B 4.32}}$ $\dfrac{1-e^z}{2+e^z}$. $\boxed{\text{B 4.34}}$ $\operatorname{th} z$.

$\boxed{\text{B 4.36}}$ $ze^{1/z}$. $\boxed{\text{B 4.38}}$ $e^{z-1/z}$.

$\boxed{\text{B 4.40}}$ $\dfrac{1}{\sin z}$.

# Конспект 16-го занятия. Изолированные особые точки однозначного характера (ИОТОХ) Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

## *Разложение функции в ряд Лорана (повторение)*

Перед решением следующего примера сделаем небольшое замечание о формулах

$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2), \qquad \ln \frac{z_1}{z_2} = \ln(z_1) - \ln(z_2),$$

где ln — главное значение логарифма. Легко видеть, что эти формулы работают не всегда. Например, формула для суммы не выполняется при $z_1 = z_2 = -1$:

$$\ln(-1) = i\pi, \qquad \ln((-1)^2) = \ln 1 = 0.$$

Но можно показать, что эти формулы работают, если $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $\arg z_1, \arg z_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. В частности, отсюда следует, что эти формулы работают для $z_k$, имеющих вид $1 + t_k$, где $|t_k| < 1$.

$\boxed{\text{A1}}$ Разложить функцию $\ln \dfrac{z+2}{z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $\infty$.

**Решение.** Поскольку величина $|z|$ предполагается большой, то следует выносить за скобку $z$ в числителе и знаменателе дроби $\frac{z+2}{z-3}$:

$$f(z) = \ln \frac{z+2}{z-3} = \ln \frac{1 + \frac{2}{z}}{1 - \frac{3}{z}} = \ln \left(1 + \frac{2}{z}\right) - \ln \left(1 - \frac{3}{z}\right).$$

Дальше можно воспользовать известным разложением функции $\ln(1+t)$ в окрестности нуля: $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$. В результате получаем:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{2^n}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{(-3)^{n-1}}{z^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n z^n}.$$

Вычислим радиус сходимости (для $t = \frac{1}{z}$):

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = 3.$$

**Ответ:** $f(z) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot z^{-n}, \qquad |z| > 3.$ □

***Кратность корня***

**Определение.** Пусть $f \in H(D)$, $z_0 \in D$, $k \in \{0, 1, \ldots\}$. Говорят, что $z_0$ есть *корень кратности* $k$ функции $f$, если существует такая аналитическая функция $g$, что

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \qquad g(z_0) \neq 0.$$

Это равносильно тому, что $f^{(n)}(z_0) = 0$ при $n < k$ и $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Также это равносильно тому, что в разложении функции $f$ в окрестности точки $z_0$ по степеням $(z - z_0)$ первые $k$ коэффициентов нулевые, а $(k+1)$-й коэффициент ненулевой:

$$c_j = 0 \qquad (0 \leqslant j < k), \qquad c_k \neq 0.$$

В следующих задачах нужно найти кратность корня $z_0$ функции $f$:

$\boxed{\text{A2}}$ $f(z) = \sin z$, $z_0 = \pi$.

**Решение.** Вычисляем производные в точке $\pi$, пока не получится ненулевое значение:

$$f^{(0)}(\pi) = f(\pi) = 0, \qquad f'(z) = \cos z, \qquad f'(\pi) = -1 \neq 0.$$

**Ответ:** простой корень (корень кратности 1). $\square$

$\boxed{\text{A3}}$ $f(z) = \cos z - 1$, $z_0 = 0$.

**Решение.** Вычисляем производные в точке 0 до первого ненулевого значения:

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos z - 1, & f(0) &= 0, \\ f'(z) &= -\sin z, & f'(0) &= 0, \\ f''(z) &= -\cos z, & f''(0) &= -1 \neq 0. \end{aligned}$$

**Ответ:** корень кратности 2. $\square$

$\boxed{\text{A4}}$ $f(z) = \exp(z)$, $z_0 = 3$.

**Решение.** $f(3) \neq 0$. Точка 3 не является корнем функции $\exp(z)$. Другими словами, это корень кратности 0.

**Ответ:** Корень кратности 0. $\square$

***Классификация ИОТОХ***

Повторим классификацию изолированных особых точек однозначного характера для аналитических функций. Будем предполагать, что $D$ — область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $f \in H(\mathbb{D}\backslash\{z_0\})$. Поясним термины. Условие $f \in H(D\backslash\{z_0\})$ означает, что $f$ — *однозначная* аналитическая функция. Поскольку $D$ — область, то $z_0$ является внутренней точкой множества $D$ и окружена «регулярными точками» функции $f$. Поэтому $z_0$ является *изолированной* особой точкой.

Пусть $f$ имеет в проколотой окрестности точки $z_0$ следующее разложение в ряд Лорана:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n.$$

Обозначим через $r$ точную нижнюю грань таких номеров $c_n$, для которых $c_n \neq 0$.

**Определение.** Точку $z_0$ называют:

— *устранимой особой точкой* функции $f$, если $r \geqslant 0$,
т. е. $c_n = 0$ при $n < 0$;

— *полюсом порядка* $k$ функции $f$, если $r = -k$, где $k > 0$,
т. е. $c_n \neq 0$ при $n = -k$ и $c_n = 0$ при $n < -k$;

— *существенной особой точкой* функции $f$, если $r = -\infty$,
т. е. множество таких индексов $n < 0$, что $c_n \neq 0$, бесконечно.

Для бесконечно удалённой точки $\infty$ определение аналогично, только учитываются ненулевые коэффициенты при *положительных* степенях $z$.

Перечислим важные теоремы об особых точках.

**Теорема.** *$z_0$ — особая точка $f$ $\iff$ существует конечный предел $f(z)$ при $z \to z_0$, $z \neq z_0$.*

**Теорема.** *$z_0$ — полюс функции $f$ $\iff$ $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.*

**Теорема.** *$z_0 \in \mathbb{C}$ — полюс $k$-го порядка функции $f$ $\iff$ $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$, где $g \in H(D)$ и $g(z_0) \neq 0$.*

**Теорема.** *$z_0$ — существенная особая точка $f$ $\iff$ не существует предела $f(z)$ при $z \to z_0$.*

В следующих упражнениях требуется найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функций на бесконечности.

$\boxed{\text{B 4.23}}$ $\dfrac{1}{z - z^3}$.

**Решение.** Разложим знаменатель на множители:

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)(1+z)}.$$

Особые точки: $0$, $1$, $-1$, $\infty$.

В точках $0$, $1$, $-1$ функция стремится к $\infty$. Значит, это полюсы. Поскольку числитель в этих точках не равен $0$, а для знаменателя это корни кратности $1$, то для функции $f$ это полюсы порядка $1$.

В точке $\infty$ существует конечный предел: $f(\infty) = 0$. Поэтому $\infty$ есть устранимая особая точка. □

$\boxed{\text{B 4.25}}$ $f(z) = \dfrac{z^5}{(1-z)^2}$.

**Решение.** Особые точки: $1$, $\infty$.

$1$ — полюс порядка $2$.

$f(\infty) = \infty$. Значит, $\infty$ — полюс функции $f$. Можно разложить функцию по степеням $\frac{1}{z}$:

$$f(z) = \frac{z^3}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{z^{n-3}} = \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{(n+4)}{z^n}.$$

Отсюда видно, что $\infty$ является полюсом порядка $3$. □

$\boxed{\text{A5}}$ $f(z) = e^{1/z}$.

**Решение.** Особые точки: $0$, $\infty$. Разложим экспоненту $e^t$ по формуле Тейлора и подставим $1/z$ вместо $t$:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}.$$

Эта формула работает при любом $z \neq 0$. Получили разложение Лорана для функции $e^{1/z}$ в проколотой окрестности точки $0$. Это разложение содержит бесконечно число членов ряда с отрицательными степенями. Поэтому $0$ — существенная особая точка.

Одновременно получили разложение функции $f$ в окрестности $\infty$. Это разложение не содержит главной части (положительных степеней $z$), поэтому

$\infty$ — устранимая особая точка. К этому же выводу можно прийти другим путём: в точке $\infty$ существует конечный предел функции $f$: $f(\infty) = 0$. $\square$

$\boxed{\text{A6}}$ $f(z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\sin z}$.

**Решение.** Приведём дроби к общему знаменателю:

$$f(z) = \frac{\sin z - z}{z \cdot \sin z}.$$

Отсюда видно, что точки вида $z = k\pi$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — полюсы первого порядка.

Исследуем поведение в точке $z = 0$. Разложим числитель:

$$\sin z - z = -\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Отсюда видно, что 0 — корень числителя кратности 3. Для знаменателя точка 0 является корнем кратности 2. Значит, для функции $f$ точка 0 будет устранимой особой точкой и корнем кратности 1

На бесконечности функция предела не имеет. Чтобы это показать, достаточно рассмотреть последовательности $z_n = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и $z_n = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Поэтому $\infty$ является существенной особой точкой. $\square$

$\boxed{\text{B 4.29}}$ $f(z) = ze^{-z}$.

**Решение.** Экспонента не обращается в 0, поэтому конечных особых точек нет. Исследуем поведение на бесконечности.

Рассмотрим две последовательности точек $z_n$, стремящиеся к бесконечности, и вычислим пределы $z_n$: Сначала возьмём $z_n = n$; затем $z_n = -n$:

$$f(n) \to 0, \qquad f(-n) \to -\infty.$$

Значит, не существует предела на бесконечности, т. е. $\infty$ — существенная особая точка функции $f$.

Другой способ решения — рассмотреть разложение в ряд Лорана:

$$f(z) = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{(n-1)!}.$$

Ряд сходится при любых $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, это разложение функции в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $\infty$. Ряд содержит бесконечно много ненулевых коэффициентов при положительных степенях $z$, т. е. бесконечно много слагаемых в главной части. Следовательно, $\infty$ — существенная особая точка. □

$\boxed{\text{В 4.31}}$ $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$.

**Решение.** Решим уравнение $e^{-z} = 1$: $z = -2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, или просто $z = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$.

Особые точки: 0; $2n\pi i$, где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $\infty$.

Легко видеть, что корни вида $2n\pi i$ функции $h(z) = 1 - e^{-z}$ являются простыми: $h'(z) = e^{-z} \neq 0$. Следовательно, точки вида $2n\pi i$, где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, являются простыми полюсами функции $f$.

Точка 0 является корнем знаменателя кратности 2, поэтому полюсом второго порядка функции $f$.

Покажем, что функция не имеет предела при $z \to \infty$:

$$f(n) = \frac{e^n}{n \cdot (1-e^{-n})} \to +\infty; \qquad f(-n) = \frac{e^{-n}}{n \cdot (1-e^{n})} \to 0.$$

Следовательно, $\infty$ является существенно особой точкой. □

$\boxed{\text{В 4.33}}$ $\dfrac{1}{z^3(2-\cos z)}$.

**Решение.** Ясно, что 0 является полюсом третьего порядка. Рассмотрим решения уравнения $\cos z = 2$, т. е. числа из множества

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccos} 2 = -i \operatorname{Ln}\left(z + \operatorname{Sqrt} z^2 - 1\right) = -i \operatorname{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right) = \\ = -i\left(\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i\right) = \{2k\pi - \ln(2 \pm \sqrt{3})\colon k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Каждая из таких точек является простым корнем выражения $2 - \cos z$. Действительно, если $2 - \cos w = 0$, то $\sin w \neq 0$, так как $\cos^2 w + \sin^2 w = 1$ (основное тригонометрическое тождество сохраняет силу и для комплексных «углов»). Следовательно, каждая такая точка является простым полюсом. □

$\boxed{\text{В 4.35}}$ $f(z) = e^{-1/z^2}$.

**Решение.** Функция имеет особые точки 0 и $\infty$. Подставляя $t = -\frac{1}{z^2}$ в ряд Тейлора-Маклорена для экспоненты, получим следующее разложение для $f$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot z^{2n}}.$$

Видно, что это разложение в ряд Лорана в кольце $0 < |z| < +\infty$. Значит, это разложение в проколотых окрестностях точек 0 и $\infty$. В разложении отсутствуют слагаемые с положительными степенями $z$, поэтому $\infty$ является устранимой особой точкой (легко видеть, что предел в $\infty$ равен 1). В разложении присутствует бесконечно много слагаемых с отрицательными степенями $z$, поэтому 0 является существенной особой точкой. $\square$