17-е занятие. Вычисление вычетов
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Классификация ИОТОХ (повторение)

Найти ИОТОХ заданной функции и определить их тип:

$\boxed{\text{В 4.33}}$ $\dfrac{1}{z^3(2-\cos z)}$. $\boxed{\text{В 4.37}}$ $e^{z/(1-z)}$.

Вычисление вычетов

Определение. Если $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$ при $0 < |z-a| < r$, то $\operatorname{res}_a f = c_{-1}$.
Если $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ при $|z| > r$, то $\operatorname{res}_\infty f = -c_{-1}$.

Теорема. *Если a — простой полюс f, то* $\operatorname*{res}\limits_a f = \lim\limits_{z\to a}((z-a)f(z))$.

Следствие. *Если $f = \frac{g}{h}$, где $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$, то* $\operatorname*{res}\limits_a f = \dfrac{g(a)}{h'(a)}$.

$\boxed{\text{А1}}$ $f(z) = \dfrac{2z+3}{z^2-z-6}$. $\boxed{\text{А2}}$ $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$.

Теорема. *Если a — полюс k-го порядка функции f, то*

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}((z-a)^k f(z))^{(k-1)}.$$

Найти вычеты указанных функций относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удалённой точки, если она не является предельной для особых точек.

$\boxed{\text{В 4.79}}$ $\dfrac{1}{z^3-z^5}$. $\boxed{\text{В 4.85}}$ $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

В следующих примерах для вычисления вычетов придётся раскладывать функции в ряды.

$\boxed{\text{В 4.90}}$ 1) $\cos\dfrac{1}{z-2}$. 2) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$.

$\boxed{\text{В 4.91}}$ $e^{z+1/z}$. $\boxed{\text{А3}}$ $\sin\dfrac{z+4}{z-1}$. Подсказка: $\sin(\alpha+\beta)$.

$\boxed{\text{В 4.97}}$ $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$.

Домашнее задание № 17
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Найти вычеты указанных функций относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удалённой точки, если она не является предельной для особых точек.

$\boxed{\text{В 4.80 (622)}}$ $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

$\boxed{\text{В 4.81 (623)}}$ $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{В 4.82 (624)}}$ $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$.

$\boxed{\text{В 4.83 (625)}}$ $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

$\boxed{\text{В 4.84 (626)}}$ $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

$\boxed{\text{В 4.86 (628)}}$ $\operatorname{tg} z$.

$\boxed{\text{В 4.87 (629)}}$ $\dfrac{1}{\sin z}$.

$\boxed{\text{В 4.92 (634)}}$ $\sin z \cdot \sin \dfrac{1}{z}$.

$\boxed{\text{В 4.93 (635)}}$ $\sin \dfrac{z}{z+1}$. Подсказка: $\sin(\alpha+\beta)$.

$\boxed{\text{В 4.94 (636)}}$ $\cos \dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$.

$\boxed{\text{В 4.99 (641)}}$ $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Дополнительные задания

$\boxed{\text{В 4.89 (631)}}$ $\operatorname{ctg}^3 z$. Достаточно найти вычет в 0. Для вычисления нужного коэффициента можно использовать формулы понижения степени и метод неопределённых коэффициентов.

$\boxed{\text{А1}}$ Вывести формулу для $\operatorname{res}_a f$, если $a \in \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где g и h — голоморфные функции в окрестности a, причём $g(a) \neq 0$, $h(a) = h'(a) = 0$, $h''(a) \neq 0$. (Указание: найти нужный коэффициент ряда Лорана методом неопределённых коэффициентов.)

Конспект 17-го занятия.
Вычисление вычетов
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Классификация ИОТОХ (повторение)

$\boxed{\text{В 4.33}}$ $\dfrac{1}{z^3(2-\cos z)}$.

Решение. Ясно, что 0 является полюсом третьего порядка. Найдём множество решений уравнения $\cos z = 2$ (через Arccos, Ln и Sqrt обозначаем многозначные функции):

$$\operatorname{Arccos} 2 = -i \operatorname{Ln}\left(2 + \operatorname{Sqrt}(2^2-1)\right) = -i \operatorname{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right) = \\ = -i\left(\ln(2\pm\sqrt{3}) + 2k\pi i\right) = \{2k\pi - \ln(2\pm\sqrt{3})\colon k \in \mathbb{Z}\}.$$

Каждая из точек этого множества является простым корнем выражения $2-\cos z$. Действительно, если $2-\cos w = 0$, то $\sin w \neq 0$, так как $\cos^2 w + \sin^2 w = 1$ (основное тригонометрическое тождество сохраняет силу и для комплексных «углов»). Следовательно, каждая такая точка является простым полюсом.

Бесконечно удалённая точка не является изолированной, так как имеется последовательность полюсов, стремящаяся к бесконечности. □

$\boxed{\text{В 4.37}}$ $f(z) = e^{z/(1-z)}$.

Решение. Особые точки: 1, ∞. Для исследования в точке 1 сделаем замену $t = z-1$ и разложим в ряд:

$$f(z) = e^{\frac{t+1}{-t}} = e^{-1}\cdot e^{-1/t} = e^{-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot t^n} = e^{-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot(z-1)^n}.$$

Главная часть разложения в точке 1 содержит бесконечно много слагаемых, поэтому особая точка 1 является существенной.

Чтобы выяснить характер особой точки ∞, проще всего найти предел функции на бесконечности:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = e^{-1}.$$

Вывод: ∞ — устранимая особая точка. □

Вычет функции в ИОТОХ: определение и формулы

Определение. *Вычетом* функции f в конечной ИОТОХ a называется коэффициент при $(z-a)^{-1}$ в разложении функции f по степеням $(z-a)$ в проколотой окрестности точки a.

Определение. *Вычетом* функции f в ИОТОХ ∞ называется число, противоположное коэффициенту при z^{-1} в разложении функции f по степеням z в проколотой окрестности точки ∞.

Вычет функции f в точке a обозначают через $\operatorname*{res}_a f$.

Теорема. *Пусть a — простой полюс функции f. Тогда*

$$\operatorname*{res}_a f = \lim_{z\to a}\left((z-a)f(z)\right).$$

Следствие. *Пусть $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где $g, h \in H(D)$. Далее, пусть $a \in D$, $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Теорема. *Пусть a — полюс k-го порядка функции f. Тогда*

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(k-1)!}F^{(k-1)}(a), \quad \textit{где} \quad F(z) := (z-a)^k f(z).$$

Теорема (о полной сумме вычетов)**.** *Пусть функция f голоморфна во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением конечного множества особых точек: $z_1, \ldots, z_n$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_\infty f = -\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_j} f.$$

Вычисление вычетов в простых полюсах

Далее в каждом упражнении нужно найти вычеты функции во всех ИОТОХ.

$\boxed{\text{A1}}$ $f(z) = \dfrac{2z+3}{z^2-z-6}$.

Решение. Из представления

$$f(z) = \frac{2z+3}{(z-3)(z+2)}$$

видно, что 3 и -2 являются простыми полюсами.

$$\operatorname*{res}_{3} f = \lim_{z\to 3}\frac{2z+3}{z+2} = \frac{9}{5}, \qquad \operatorname*{res}_{-2} f = \lim_{z\to -2}\frac{2z+3}{z-3} = \frac{1}{5}.$$

Другой способ:

$$\operatorname*{res}_{3} f = \left(\frac{2z+3}{2z-1}\right)\bigg|_{z=3} = \frac{9}{5}, \qquad \operatorname*{res}_{-2} f = \left(\frac{2z+3}{2z-1}\right)\bigg|_{z=-2} = \frac{1}{5}.$$

Вычет в ∞ можно найти с помощью теоремы о полной сумме вычетов:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = -\left(\frac{9}{5}+\frac{1}{5}\right) = -2.$$

Ответ: $\operatorname*{res}_{3} f = \dfrac{9}{5}$, $\operatorname*{res}_{-2} f = \dfrac{1}{5}$, $\operatorname*{res}_{\infty} f = -2$. □

$\boxed{\text{A2}}$ $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$.

Решение. Особые точки: $z_n := \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, ∞.

$\boxed{z_n\ (n \in \mathbb{Z})}$ Положим $g(z) = \cos z$. Тогда

$$g(z_n) = 0, \qquad g'(z) = -\sin z, \qquad g'(z_n) = (-1)^{n-1} \neq 0.$$

Отсюда видно, что z_n — простой полюс,

$$\operatorname*{res}_{z_n} f = \frac{1}{g'(z_n)} = (-1)^{n-1}.$$

$\boxed{\infty}$ не является изолированной особой точкой, так как имеется последовательность полюсов, стремящаяся к ∞.

Ответ: $\operatorname*{res}_{\frac{\pi}{2}+n\pi} f = (-1)^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$. □

Вычисление вычетов в полюсах высших порядков

Найти вычеты указанных функций относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удалённой точки, если она не является предельной для особых точек.

$\boxed{4.79}$ $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$.

Решение. $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)(1+z)}$. Особые точки: 0, 1, -1, ∞.

$\boxed{0}$ — полюс третьего порядка. Умножаем на z^3:

$$F(z) := z^3 f(z) = \frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z},$$

находим вторую производную:

$$F'(z) = \frac{1/2}{(1-z)^2} - \frac{1/2}{(1+z)^2}, \qquad F''(z) = \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{1}{(1+z)^3}$$

и её значение в точке 0: $F''(0) = 2$. Отсюда

$$\operatorname*{res}_0 f = \frac{1}{2!} F''(0) = 1.$$

К этому же результату можно было прийти проще, раскладывая функцию в ряд Лорана в проколотой окрестности точки 0:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-z^2} = \frac{1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots}{z^3} = \frac{1}{z} + z + z^3 + \ldots.$$

Коэффициент при z^{-1} — это и есть вычет.

$\boxed{1}$ — простой полюс. $\operatorname*{res}_1 f = \left(-\dfrac{1}{z^3(1+z)} \right) \Bigg|_{z=1} = -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{-1}$ — простой полюс. $\operatorname*{res}_{-1} f = \left(\dfrac{1}{z^3(1-z)} \right) \Bigg|_{z=-1} = -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\infty}$ Используем теорему о полной сумме вычетов:

$$\operatorname*{res}_\infty f = -(\operatorname*{res}_0 f + \operatorname*{res}_1 f + \operatorname*{res}_{-1} f) = 0.$$

Ответ: $\operatorname*{res}_0 f = 1, \quad \operatorname*{res}_1 f = \operatorname*{res}_{-1} f = -\dfrac{1}{2}, \quad \operatorname*{res}_\infty f = 0.$ □

$\boxed{4.85}$ $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

Решение. Особые точки: $0, 3i, -3i, \infty$.

$\boxed{0}$ — полюс второго порядка.

$$F(z) := \frac{e^z}{z^2+9}, \qquad F'(z) = \frac{e^z(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2}, \qquad \operatorname*{res}_0 f = F'(0) = \frac{1}{9}.$$

$\boxed{3i}$ — полюс первого порядка.

$$F(z) := \frac{e^z}{z^2(z+3i)}, \quad \operatorname*{res}_{3i} f = F(3i) = \frac{i}{54}e^{3i} = \frac{1}{54}(-\sin 3 + i\cos 3).$$

$\boxed{-3i}$ — полюс первого порядка.

$$F(z) := \frac{e^z}{z^2(z-3i)}, \quad \operatorname*{res}_{-3i} f = F(-3i) = -\frac{i}{54}e^{-3i} = \frac{1}{54}(-\sin 3 - i\cos 3).$$

$\boxed{\infty}$ Используем теорему о полной сумме вычетов:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = -\left(\operatorname*{res}_0 f + \operatorname*{res}_{3i} f + \operatorname*{res}_{-3i} f\right) = \frac{1}{27}\sin 3 - \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\operatorname*{res}_0 f = \dfrac{1}{9}$, $\operatorname*{res}_{\pm 3i} f = \dfrac{1}{54}(-\sin 3 \pm i\cos 3)$, $\operatorname*{res}_{\infty} f = \dfrac{1}{27}\sin 3 - \dfrac{1}{9}$. $\square$

Вычисление вычетов с помощью разложения в ряды

В случае существенных особых точек можно находить вычет с помощью определения, вычисляя нужный коэффициент ряда Лорана.

$\boxed{4.90,\ 1)}$ $\cos\dfrac{1}{z-2}$.

Решение. Особые точки: $2, \infty$. Найдём вычет в точке 2 (вычет в ∞ противоположен). В разложение $\cos t$ по степеням t подставим $t = \dfrac{1}{z-2}$:

$$\cos\frac{1}{z-2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(z-2)^4} + \ldots$$

Видим, что коэффициент при $(z-2)^{-1}$ равен 0.

Ответ: $\operatorname*{res}_2 f = 0, \quad \operatorname*{res}_\infty f = 0.$ □

$\boxed{4.90,\ 2)}$ $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$.

Решение. Особые точки: $2, \infty$. Разложим z^3 по степеням $(z-2)$:

$$z^3 = ((z-2)+2)^3 = (z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8,$$

умножим это выражение на разложение $\cos\dfrac{1}{z-2}$:

$$z^3\cos\frac{1}{z-2} = \big((z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8\big)\cdot$$
$$\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(z-2)^4} + \ldots\right).$$

Находим коэффициент при $(z-2)^{-1}$: $\operatorname*{res}_2 f = -6 + \dfrac{1}{24} = -\dfrac{143}{24}$.

Ответ: $\operatorname*{res}_2 f = -\dfrac{143}{24}, \quad \operatorname*{res}_\infty f = \dfrac{143}{24}.$ □

$\boxed{4.91}$ $e^{z+1/z}$.

Решение. Особые точки: $0, \infty$. Найдём только вычет в точке 0 (вычет в ∞ противоположен).

$$\exp(z + 1/z) = \exp(z) \cdot \exp(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}.$$

Видно, что z^{-1} получается при перемножении слагаемых вида $\dfrac{z^n}{n!}$ и $\dfrac{z^{-k}}{k!}$, когда $k = n + 1$.

Ответ: $\operatorname*{res}_0 f = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot (n+1)!}$. $\square$

$\boxed{\text{A3}}$ $\sin \dfrac{z+4}{z-1}$. Подсказка: $\sin(\alpha + \beta)$.

Решение. Особые точки: $1, \infty$. Найдём только вычет в точке 1. Выделим целую часть дроби и воспользуемся формулой синуса суммы:

$$f(z) = \sin\left(1 + \frac{5}{z-1}\right) = \sin 1 \cdot \cos \frac{5}{z-1} + \cos 1 \cdot \sin \frac{5}{z-1} =$$
$$= \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n}}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5^{2n+1}}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}.$$

Отметим, что вычет обладает линейными свойствами: вычет суммы функций равен сумме вычетов, при умножении функции на число вычет умножается на число.

Вычет первого слагаемого равен 0, так как присутствуют только чётные степени $(z-1)$. Во втором слагаемом степень -1 получается при $n = 0$. Поэтому

$$\operatorname*{res}_0 f = \cos 1 \cdot \frac{-5}{1} = -5 \cos 1.$$

$\square$

$\boxed{\text{B } 4.97}$ $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$.

Решение. Особые точки: 0, ∞, $\frac{1}{n\pi}$, где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$\boxed{\frac{1}{n\pi},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ Пусть $g(z) = \sin\frac{1}{z}$. Тогда

$$g\left(\frac{1}{n\pi}\right) = 0, \qquad g'(z) = -\frac{1}{z^2} \cdot \cos\frac{1}{z}, \qquad g'\left(\frac{1}{n\pi}\right) = -\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} \neq 0.$$

Таким образом, каждая точка вида $\frac{1}{n\pi}$ является простым корнем функции g, а следовательно простым полюсом функции f.

$$\operatorname*{res}_{\frac{1}{n\pi}} f = \frac{1}{g'\left(\frac{1}{n\pi}\right)} = (-1)^{n+1} \cdot n^2\pi^2.$$

$\boxed{0}$ Не является изолированной особой точкой, так как служит предельной точкой для множества полюсов вида $\frac{1}{n\pi}$.

$\boxed{\infty}$ Нужно рассмотреть разложение функции f в окрестности ∞ и найти коэффициент при z^{-1}. Сделаем замену $t = \frac{1}{z}$, исследуем разложение функции $\frac{1}{\sin t}$ в проколотой окрестности 0 и найдём коэффициент при t^1.

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t\left(1 - \frac{t^2}{6} + \ldots\right)} = \frac{1}{t}\left(A + Bt + Ct^2 + \ldots\right).$$

Неопределённые коэффициенты A, B, C находим из равенства

$$\left(1 - \frac{t^2}{6} + \ldots\right)\left(A + Bt + Ct^2 + \ldots\right) = 1.$$

Отсюда $A = 1$, $B = 0$, $C = \frac{1}{6}$. Вычетом в ∞ является коэффициент при x^{-1} в разложении f, взятый с противоположным знаком.

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = -C = -\frac{1}{6}.$$

□