18-е занятие. Вычисление интегралов по контурам с помощью вычетов
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Теорема (основная теорема о вычетах). *Пусть D — область в комплексной плоскости с кусочно-гладкой границей γ, f — функция, голоморфная в окрестности множества $D \cup \gamma$, за исключением конечного множества A особых точек, принадлежащих D. Тогда*

$$\boxed{\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname*{res}_{a} f,}$$

Вычислить интегралы с помощью вычетов:

$\boxed{\text{A1}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}\,dz,$ где $C\colon |z| = 1.$

$\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{z\,dz}{\sin z},$ где $C\colon \left|z - \frac{3\pi}{2}\right| = 2\pi.$

$\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{1}{(z-4)(z^4+2)}\,dz.$

$\boxed{\text{B 4.115}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{z^4+1},$ где $C\colon x^2 + y^2 = 2x.$

$\boxed{\text{A4}}$ $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z\cos^2\frac{1}{z}\,dz,$ где $C\colon |z| = 1.$

$\boxed{\text{B 4.122}}$ $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^n e^{2/z}\,dz,$ где $n \in \mathbb{Z},$ $C\colon |z| = r.$

$\boxed{\text{A5}}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} (1+z+z^2)\left(e^{1/(z+2)} + e^{1/(z+5)}\right)dz.$

$\boxed{\text{A6}}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(e^z-1)\operatorname{tg} z}.$

Домашнее задание № 18
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Вычислить интегралы с помощью вычетов:

$\boxed{\text{B 4.116}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, где $C\colon |z-2| = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{A1}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{z\,dz}{\cos z}$, где $C\colon |z+\pi| = 2\pi$.

$\boxed{\text{B 4.117}}$ $\displaystyle\int \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, где $C\colon |z| = 2$.

$\boxed{\text{B 4.118}}$ $\displaystyle\int \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$, где $C\colon |z| = 1$.

$\boxed{\text{B 4.119}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}\,dz$ где $C\colon |z| = 1$.

$\boxed{\text{B 4.120}}$ $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \sin\frac{1}{z}\,dz$, где $C\colon |z| = r$.

$\boxed{\text{B 4.121}}$ $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \sin^2\frac{1}{z}\,dz$, где C — окружность $|z| = r$.

$\boxed{\text{B 4.123}}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} (1+z+z^2)\left(e^{1/z}+e^{1/(z-1)}+e^{1/(z-2)}\right)\,dz.$

$\boxed{\text{B 4.124}}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{z\,dz}{\sin z(1-\cos z)}.$

Конспект 18-го занятия.
Вычисление интегралов по контурам с помощью вычетов
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Теорема (основная теорема о вычетах). *Пусть D — область в комплексной плоскости с кусочно-гладкой границей γ, f — функция, голоморфная на $D \cup \gamma$, за исключением конечного множества A особых точек, принадлежащих D. Тогда*

$$\boxed{\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in A} \operatorname*{res}_a f,}$$

Вычислить интегралы с помощью вычетов:

$\boxed{\text{A1}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}\,dz$, где $C\colon |z| = 1$.

Решение. Функция f имеет конечные особые точки 0, 3 и -3. Внутрь контура попадает только особая точка $z = 0$. По основной теореме, $I = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_0 f$. Находим этот вычет, учитывая, что $z = 0$ — полюс второго порядка.

$$F(z) = \frac{e^z}{z^2+9}, \quad F'(z) = \frac{e^z(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2}, \quad \operatorname*{res}_0 f = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $I = \dfrac{2\pi i}{9}$. $\square$

$\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{z\,dz}{\sin z}$, где $C\colon \left|z - \frac{3\pi}{2}\right| = 2\pi$.

Решение. Внутрь контура попали особые точки $0, \pi, 2\pi, 3\pi$. Но точка $z = 0$ является устранимой особой точкой, в ней вычет равен 0.

Точки $\pi, 2\pi, 3\pi$ являются простыми полюсами. Для вычисления вычетов в этих точках удобно использовать формулу

$$\operatorname*{res}_a \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)},$$

которая работает, когда $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. По этой формуле,

$$\operatorname*{res}_\pi f = \frac{\pi}{\cos\pi} = -\pi, \qquad \operatorname*{res}_{2\pi} f = \frac{2\pi}{\cos 2\pi} = 2\pi, \qquad \operatorname*{res}_{3\pi} f = \frac{3\pi}{\cos 3\pi} = -3\pi.$$

Отсюда $I = 2\pi i \cdot (-2\pi) = -4\pi^2 i$.

Ответ: $I = -4\pi^2 i$. $\square$

$\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{1}{(z-4)(z^4+2)}\, dz.$

Решение. Внутрь контура попадает четыре особых точки — корни четвёртой степени из -2. Но проще посчитать вычеты в двух других особых точках (4 и ∞), а затем использовать тот факт, что сумма всех вычетов равна 0.

$\boxed{4}$ $F(z) = \dfrac{1}{z^4+2}$, $\operatorname*{res}\limits_4 f = F(4) = \dfrac{1}{258}$.

$\boxed{\infty}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^5\left(1-\frac{4}{z}\right)\left(1+\frac{2}{z^4}\right)} = \\ &= \frac{1}{z^5}\left(1+\frac{4}{z}+\frac{16}{z^2}+\ldots+\right)\left(1-\frac{2}{z^4}+\frac{4}{z^8}+\ldots\right). \end{aligned}$$

Слагаемое с z^{-1} отсутствует, поэтому $\operatorname*{res}\limits_\infty f = 0$.

Ответ: $I = -\dfrac{2\pi i}{258}$. $\square$

$\boxed{\text{B 4.115}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{z^4+1}$, где $C\colon x^2+y^2=2x$.

Решение. Разложим знаменатель на множители:

$$z^4+1 = (z^2+i)(z^2-i) = (z-e^{-i\pi/4})(z+e^{-i\pi/4})(z-e^{i\pi/4})(z+e^{i\pi/4}).$$

Внутрь контура попадают точки $e^{i\pi/4}$ и $e^{-i\pi/4}$. Они являются простыми полюсами.

$\boxed{e^{i\pi/4}}$ $F(z) = \dfrac{1}{(z+e^{i\pi/4})(z^2+i)}$,

$$\operatorname*{res}_{e^{i\pi/4}} f = \frac{1}{2e^{i\pi/4}\cdot 2i} = -\frac{i}{4}e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i).$$

$\boxed{e^{-i\pi/4}}$ $F(z) = \dfrac{1}{(z+e^{-i\pi/4})(z^2-i)}$,

$$\operatorname*{res}_{e^{-i\pi/4}} f = \frac{1}{2e^{-i\pi/4}\cdot(-2i)} = \frac{i}{4}e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1+i).$$

Отсюда $I = 2\pi i \cdot (-\sqrt{2}/4) = -\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$. $\square$

$\boxed{\text{A4}}$ $\quad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_C z\cos^2\frac{1}{z}\,dz, \quad$ где $C\colon |z| = 1$.

Решение. Внутрь контура попадает только особая точка $z = 0$, поэтому $I = 2\pi i \operatorname*{res}\limits_0 f$. Используем разложения по степеням $1/z$:

$$f(z) = z\left(1 - \frac{z^{-2}}{2} + \frac{z^{-4}}{24} + \ldots\right)\left(1 - \frac{z^{-2}}{2} + \frac{z^{-4}}{24} + \ldots\right) =$$
$$= z\left(1 - z^{-2} + \frac{z^{-4}}{3} + \ldots\right) = z - \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \ldots$$

Отсюда $\operatorname*{res}\limits_0 f = -1$ и $I = -2\pi i$.

Ответ: $I = -2\pi i$. $\square$

$\boxed{4.122}$ $\quad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_C z^n e^{2/z}\,dz$, где $n \in \mathbb{Z}$, $C\colon |z| = r$.

Решение. Внутрь контура попадает особая точка $z = 0$. Записываем разложение в этой точке:

$$f(z) = z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k! \cdot z^k}.$$

Нужно найти коэффициент перед z^{-1}. Если $n < -1$, то слагаемых со степенью -1 не будет, т. е. вычет равен 0. Если же $n \geqslant -1$, то нужное слагаемое получается при $k = n + 1$, поэтому

$$I = \operatorname*{res}_0 f = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ответ: $I = \begin{cases} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, & n \geqslant -1; \\ 0, & n < -1. \end{cases}$ $\square$

$\boxed{\text{A5}}$ $\quad \displaystyle\int\limits_{|z|=4} (1 + z + z^2)\left(e^{1/(z+2)} + e^{1/(z+5)}\right)dz.$

Решение. Внутрь контура попадает только особая точка $z = -2$. Заметим, что в этой точке функция

$$(1 + z + z^2)e^{1/(z+5)}$$

особенностей не имеет, поэтому её вычет равен 0. Раскладываем в точке -2 другое слагаемое (для разложения многочлена можно использовать схему Горнера):

$$(1+z+z^2)e^{1/(z+2)} = ((z+2)^2 - 3(z+2) + 3)\cdot \\ \cdot\left(1 + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{2(z+2)^2} + \frac{1}{6(z+2)^3} + \dots\right)$$

Находим коэффициент при $(z+2)^{-1}$:

$$\operatorname*{res}_{-2} f = 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $I = \dfrac{10\pi i}{3}$. □

$\boxed{\text{A6}}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(e^z-1)\operatorname{tg} z}$.

Решение. Подынтегральная функция

$$f(z) = \frac{z}{(e^z-1)\operatorname{tg} z}$$

имеет особые точки $\frac{\pi k i}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Из них внутри контура $|z| = 1$ лежит только точка 0. В этой точке числитель имеет корень кратности 1, а знаменатель — корень кратности 2. Следовательно, для функции f точка 0 является простым полюсом.

$$F(z) := z \cdot f(z) = \frac{z^2}{(e^z-1)\operatorname{tg} z},$$

Для вычисления $F(0)$ воспользуемся тем, что $e^z - 1 \sim z$, $\operatorname{tg} z \sim z$ при $z \to 0$:

$$\lim_{z\to 0} F(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{(e^z-1)\operatorname{tg} z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{z^2} = 1.$$

Отсюда

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{0} f = 2\pi i.$$

Ответ: $I = 2\pi i$. □