19-е занятие. Вычисление действительных интегралов с помощью вычетов
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Найти следующие тригонометрические интегралы с помощью вычетов:

$\boxed{\text{A1}}$ $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{2+\cos 2\varphi}$. $\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3+\cos\varphi)^2}$. $\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3+2\cos^2\varphi)^2}$.

Теорема. *Пусть функция f голоморфна во всей комплексной плоскости, за исключением конечного множества S_f особых точек, причём $S_f \cap \mathbb{R} = \varnothing$ и*

$$M(R) = o(1/R) \quad \textit{при} \quad R \to +\infty, \qquad \textit{где} \qquad M(R) = \max_{|z|=R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)|.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{a\in S_f:\ \operatorname{Im}(a)>0} \operatorname*{res}_a f.$$

Найти следующие интегралы с бесконечными пределами от рациональных функций с помощью вычетов:

$\boxed{\text{B 4.141}}$ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a>0)$. $\boxed{\text{B 4.142, } n=2}$ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Теорема. *Пусть функция f голоморфна во всей комплексной плоскости, за исключением конечного множества S_f особых точек, причём $S_f \cap \mathbb{R} = \varnothing$ и*

$$\lim_{R\to+\infty} M(R) = 0, \qquad \textit{где} \qquad M(R) = \max_{|z|=R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)|.$$

Тогда для любого $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x} = 2\pi i \cdot \sum_{a\in S_f:\ \operatorname{Im}(a)>0} \operatorname*{res}_a \left(f(z)\cdot e^{i\lambda z}\right).$$

$\boxed{\text{A4}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+5}$. $\boxed{\text{A5}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+9}\,dx$.

Домашнее задание № 19
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Вычислить следующие интегралы от тригонометрических функций с помощью вычетов:

$\boxed{\text{В 4.131 (673)}}$ $$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} \quad (a>1). \quad \text{Указание. Положить } z=e^{i\varphi}.$$

$\boxed{\text{В 4.132 (674)}}$ $$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2} \quad (a>b>0).$$

$\boxed{\text{В 4.133 (675)}}$ $$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2} \quad (a>0,\ b>0).$$

Найти следующие интегралы с бесконечными пределами от рациональных функций с помощью вычетов:

$\boxed{\text{В 4.140 (682)}}$ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}.$$ $\boxed{\text{В 4.142 (684), } n=3}$ $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

$\boxed{\text{В 4.143 (685)}}$ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \qquad (a>0,\ b>0).$$

$\boxed{\text{В 4.144 (686)}}$ $$\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$$

Вычислить интегралы, пользуясь леммой Жордана:

$\boxed{\text{В 4.149 (691)}}$ 1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10}.$$ 2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2-2x+10}.$$

$\boxed{\text{В 4.150 (692)}}$ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2+4x+20}.$$ $\boxed{\text{В 4.151 (693)}}$ $$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2} \quad (a,b\in\mathbb{R}).$$

$\boxed{\text{В 4.152 (694)}}$ $$\int_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$$

Конспект 19-го занятия. Вычисление действительных интегралов с помощью вычетов Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Тригонометрические интегралы

Рассмотрим интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi$, где R — рациональная функция. Общая идея: сделать замену $z = e^{i\varphi}$, выразить $d\varphi$ через z и dz, с помощью формул Эйлера выразить подынтегральную функцию через z. При замене $z = e^{i\varphi}$ отрезок $[0, 2\pi]$ переходит в окружность $|z| = 1$. Получится интеграл по окружности $|z| = 1$ от рациональной функции. Такой интеграл можно найти с помощью вычетов.

$\boxed{\text{A1}}$ $$\int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{2 + \cos 2\varphi}.$$

Решение. Чтобы получить интеграл по окружности $|z| = 1$, сделаем замену $z = e^{2i\varphi}$. Выражаем $d\varphi$ через z и dz, а подынтегральную функцию через z:

$$dz = e^{2i\varphi} \cdot 2i\, d\varphi = z \cdot 2i\, d\varphi, \qquad d\varphi = \frac{dz}{2i \cdot z};$$

$$\cos 2\varphi = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \qquad \frac{1}{2 + \cos 2\varphi} = \frac{1}{2 + \frac{z^2+1}{2z}} = \frac{2z}{z^2 + 4z + 1}.$$

После замены интеграл принимает следующий вид:

$$I = \frac{1}{i} \cdot \int\limits_{|z|=1} f(z)\, dz, \qquad \text{где} \qquad f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 1}.$$

Квадратный трёхчлен $z^2 + 4z + 1$ имеет корни $-2 \pm \sqrt{3}$. Внутрь окружности $|z| = 1$ попадает только корень $-2 + \sqrt{3}$. Это простой полюс для функции f.

$$\operatorname*{res}_{-2+\sqrt{3}} f = \left(\frac{1}{2z + 4}\right)\bigg|_{z=-2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Теперь можно вычислить интеграл с помощью основной теоремы о вычетах:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{i} \cdot \operatorname*{res}_{-2+\sqrt{3}} f = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $I = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$. $\square$

$\boxed{\text{А2}}$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3+\cos\varphi)^2}.$

Решение. Сделаем замену $z = e^{i\varphi}$.

$$dz = ie^{i\varphi}\,d\varphi, \qquad d\varphi = \frac{dz}{iz},$$
$$\cos\varphi = \frac{z^2+1}{2z}, \qquad \frac{1}{(3+\cos\varphi)^2} = \frac{4z^2}{(z^2+6z+1)^2}.$$

После замены интеграл принимает следующий вид:

$$I = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} f(z)\,dz, \qquad \text{где} \qquad f(z) = \frac{4z}{(z^2+6z+1)^2}.$$

Находим корни знаменателя: $-3\pm2\sqrt{2}$. Внутри контура $|z|=1$ лежит только корень $-3+2\sqrt{2}$. Это полюс второго порядка функции f.

$$F(z) = \left(z+3-2\sqrt{2}\right)^2\cdot f(z) = \frac{4z}{\left(z+3+2\sqrt{2}\right)^2}.$$
$$F'(z) = \frac{4\left(z+3+2\sqrt{2}\right)^2 - 8z\cdot\left(z+3+2\sqrt{2}\right)}{\left(z+3+2\sqrt{2}\right)^4} = \frac{4\left(3+2\sqrt{2}-z\right)}{\left(z+3+2\sqrt{2}\right)^3};$$
$$\operatorname*{res}_{-3+2\sqrt{2}} f = \frac{1}{1!}\cdot F'(-3+2\sqrt{2}) = \frac{4\cdot6}{\left(4\sqrt{2}\right)^3} = \frac{4\cdot6}{64\cdot2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{32}.$$

Отсюда
$$I = 2\pi i\cdot\frac{1}{i}\cdot\operatorname*{res}_{-3+2\sqrt{2}} f = \frac{3\sqrt{2}}{16}.$$

Ответ: $I = \dfrac{3\sqrt{2}\pi}{16}$. $\square$

$\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3+2\cos^2\varphi)^2}$.

Решение. В этом примере выгодно сначала понизить степень:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(4+\cos 2\varphi\right)^2}.$$

Сделаем замену $z = e^{2i\varphi}$. Когда φ пробегает отрезок $[0, 2\pi]$, z два раза пробегает окружность $|z| = 1$ в положительном направлении. Значит, интеграл по окружности $|z| = 1$ нужно будет удвоить. Выражаем $d\varphi$ и подынтегральную функцию через z и dz:

$$dz = 2i \cdot z \cdot d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dz}{2i \cdot z};$$
$$\frac{1}{(4+\cos 2\varphi)^2} = \frac{1}{\left(4 + \frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{4z^2}{(z^2+8z+1)^2}.$$

После замены интеграл принимает следующий вид:

$$I = 2 \cdot \frac{4}{2i} \int\limits_{|z|=1} f(z)\,dz = \frac{4}{i} \cdot \int\limits_{|z|=1} f(z)\,dz, \qquad \text{где} \qquad f(z) = \frac{z}{(z^2+8z+1)^2}.$$

Знаменатель имеет корни $-4 \pm \sqrt{15}$. Внутрь контура $|z| = 1$ попадает только корень $-4 + \sqrt{15}$. Это полюс второго порядка функции f.

$$g(z) := \left(z + 4 - \sqrt{15}\right)^2 \cdot f(z) = \frac{z}{(z+4+\sqrt{15})^2},$$
$$g'(z) = \frac{(z+4+\sqrt{15})^2 - 2z(z+4+\sqrt{15})}{(z+4+\sqrt{15})^4} = \frac{4+\sqrt{15}-z}{(z+4+\sqrt{15})^3},$$
$$\operatorname*{res}_{-4+\sqrt{15}} f = g'(-4+\sqrt{15}) = \frac{8}{\left(2\sqrt{15}\right)^3} = \frac{\sqrt{15}}{225}.$$

По основной теореме о вычетах,

$$I = \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{-4+\sqrt{15}} f = \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{15}}{225} = \frac{8\pi\sqrt{15}}{225}.$$

Ответ: $I = \dfrac{8\pi\sqrt{15}}{225}$. $\square$

Вычисление интегралов по действительной прямой

Теорема. *Пусть функция f голоморфна во всей комплексной плоскости, за исключением конечного множества S_f особых точек, причём $S_f \cap \mathbb{R} = \varnothing$ и*

$$M(R) = o(1/R) \quad \textit{при} \quad R \to +\infty, \qquad \textit{где} \qquad M(R) = \max_{|z|=R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)|.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{a \in S_f:\ \operatorname{Im}(a)>0} \operatorname*{res}_a f.$$

Доказательство. Пусть R_1 — максимальный из модулей конечных особых точек функции f:

$$R_1 = \max_{a \in S_f} |a|.$$

Выберем произвольно число R из луча $(R_1, +\infty)$ и рассмотрим интеграл от $f(z)\,dz$ по контуру, состоящему из отрезка $[-R, R]$, проходимого от $-R$ к R, и полуокружности C_R: $|z| = R,\ \operatorname{Im}(z) > 0$. По основной теореме о вычетах,

$$\int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = \sum_{a \in S_f:\ \operatorname{Im}(a)>0} \operatorname*{res}_a f. \tag{1}$$

Покажем, что $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ при $R \to +\infty$. Действительно,

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \leqslant \pi R \cdot M(R) \to 0.$$

Теперь нужная формула получается из (1) предельным переходом при $R \to +\infty$. $\square$

$\boxed{\text{В 4.141}}$ $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a>0).$

Решение. Из-за чётности подынтегральной функции

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}.$$

Покажем, что она достаточно быстро убывает на бесконечности:

$$M(R) \leqslant= \max_{|z|=R} \frac{1}{|z|^2 \cdot \left|1+\frac{a^2}{z^2}\right|^2}.$$

Если $R>2a$, то при $|z|=R$ получим $\left|\frac{a}{z}\right| < \frac{1}{2}$, $\left|1+\frac{a}{z}\right| > 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Следовательно, при $R>2a$

$$M(R) \leqslant \frac{4}{R^2} = o\left(1/R\right).$$

Условия теоремы выполнены, осталось вычислить нужные вычеты.

Функция f имеет конечные особые точки ai и $-ai$. В верхней полуплоскости лежит только ai. Для функции f это полюс второго порядка.

$$\begin{aligned}
&g(z) := (z-ai)^2 \cdot f(z) = \frac{z^2}{(z+ai)^2};\\
&g'(z) = \frac{2z(z+ai)^2 - 2z^2(z+ai)}{(z+ai)^4} = \frac{2z\cdot ai}{(z+ai)^3};\\
&\operatorname*{res}_{ai} f = g'(ai) = \frac{-2a^2}{(2ai)^3} = -\frac{i}{4a}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$I = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4a}\right) = \frac{\pi}{4a}.$$

Ответ: $\quad I = \dfrac{\pi}{4a}.$ □

$\boxed{\text{В 4.142, } n = 2}$ $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение. Из-за чётности,

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

Покажем, что она достаточно быстро убывает на бесконечности.

$$M(R) \leqslant \max_{|z|=R} |f(z)| = \max_{|z|=R} \frac{1}{|z|^2 \cdot \left|1 + \frac{1}{z}\right|^2}.$$

Если $R > 2$, то при $|z| = R$ получим $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2}$, $\left|1 + \frac{1}{z}\right| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

$$M(R) \leqslant \frac{4}{R^2} = o(1/R).$$

Условия теоремы выполнены, осталось найти нужные вычеты.

Конечные особые точки функции f: i, $-i$. В верхней полуплоскости лежит только i. Это полюс второго порядка.

$$g(z) = (z-i)^2 \cdot f(z) = \frac{1}{(z+i)^2};$$
$$g'(z) = -\frac{2}{(z+i)^3};$$
$$\operatorname*{res}_i f = g'(i) = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{i}{4}.$$

Отсюда

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $I = \dfrac{\pi}{4}$. $\square$

Интегралы по прямой с круговым множителем

Приведём без доказательства лемму Жордана:

Лемма (Жордан). *Пусть функция f_1 голоморфна во всей комплексной плоскости, за исключением конечного множества особых точек S_f, причём $S_f \cap \mathbb{R} = \varnothing$ и*

$$\lim_{R\to+\infty} M(R) = 0, \qquad \text{где} \qquad M(R) = \max_{|z|=R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f_1(z)|.$$

Тогда для любого $\lambda \geqslant 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} f_1(z) e^{i\lambda z}\, dz = 0,$$

где γ_R — верхняя полуокружность окружности $|z| = R$.

С помощью этой леммы докажем следующую теорему:

Теорема. *Пусть функция f_1 голоморфна во всей комплексной плоскости, за исключением конечного множества S_f особых точек, причём $S_f \cap \mathbb{R} = \varnothing$ и*

$$\lim_{R\to+\infty} M(R) = 0, \qquad \text{где} \qquad M(R) = \max_{|z|=R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f_1(z)|.$$

Тогда для любого $\lambda > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) e^{i\lambda x} = 2\pi i \cdot \sum_{a \in S_f:\ \operatorname{Im}(a) > 0} \operatorname*{res}_a f, \quad \text{где} \quad f(z) = f_1(z) e^{i\lambda z}.$$

Доказательство. Пусть R_1 — максимальный из модулей конечных особых точек функции f_1 (или f; функция f имеет те же особые точки, что и f):

$$R_1 = \max_{a \in S_f} |a|.$$

Выберем произвольно M из луча $(R_1, +\infty)$ и рассмотрим контур $[-R, R] \cup \gamma_R$, где γ_R — верхняя полуокружность окружности $|z| = R$. По основной теореме о вычетах,

$$\int\limits_{-R}^{R} f_1(x) e^{i\lambda x}\, dx + \int\limits_{\gamma_R} f_1(z) e^{i\lambda z}\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{a \in S_f:\ \operatorname{Im}(a) > 0} \operatorname*{res}_a f.$$

Переходя к пределу при $R \to +\infty$ и пользуясь леммой Жордана, получаем доказываемое равенство. $\square$

$\boxed{\text{A4}}$ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+5}$.

Решение. Очевидно, $I = \mathrm{Re}(I_1)$, где $I_1 = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}\,dx}{x^2-2x+5}$. Пусть

$$f_1(z) = \frac{z}{z^2-2z+5}, \qquad f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+5}.$$

Покажем, что для f_1 выполнено условие леммы Жордана:

$$M(R) \leqslant \sup_{|z|=R} \frac{|z|}{|z^2-2z+5|} = \sup_{|z|=R} \frac{1}{|z|\cdot\left|1-\frac{2}{z}+\frac{5}{z^2}\right|}.$$

Если $R > 10$, то при $|z| = R$ имеют место неравенства $\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{2}{5}$, $\left|\frac{5}{z^2}\right| < \frac{1}{20}$, из которых вытекает, что

$$\left|1-\frac{2}{z}+\frac{5}{z^2}\right| \geqslant 1-\frac{2}{5}-\frac{1}{20} = \frac{11}{20} > \frac{1}{2}, \qquad M(R) \leqslant \frac{2}{R} \to 0.$$

Функция f имеет особые точки $1+2i$ и $1-2i$. В верхней полуплоскости лежит только $1+2i$. Это простой полюс.

$$\operatorname*{res}_{1+2i} f = \left(\frac{ze^{iz}}{z-1+2i}\right)\Bigg|_{z=1+2i} = \frac{(1+2i)e^{i(1+2i)}}{4i} = \frac{(2-i)(\cos(1)+i\sin(1))}{4e^2}.$$

Отсюда

$$I_1 = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{1+2i} f = \frac{(1+2i)(\cos(1)+i\sin(1))\pi}{2e^2},$$
$$I = \mathrm{Re}(I_1) = \frac{(\cos(1)-2\sin(1))\pi}{2e^2}.$$

Ответ: $\quad I = \dfrac{(\cos(1)-2\sin(1))\pi}{2e^2}$. $\square$

$\boxed{\text{A5}}$ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+9}\,dx.$

Решение. Случай $a = 0$ тривиален:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{3}.$$

Рассмотрим случай $a > 0$. Пусть

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+9}, \qquad f_1(z) = \frac{1}{z^2+9}, \qquad I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Оценим $|f_1(z)|$ при $|z| = R$, где $R \to +\infty$:

$$M(R) \leqslant \sup_{|z|=R} \frac{1}{|z^2+1|} = \sup_{|z|=R} \frac{1}{|z|^2 \cdot \left|1+\frac{1}{z^2}\right|}.$$

Если $R > 2$, то при $|z| = R$ получим $\left|\frac{1}{z^2}\right| < \frac{1}{4}$, откуда

$$\left|1+\frac{1}{z^2}\right| > \frac{3}{4} > \frac{1}{2}, \qquad M(R) \leqslant \frac{2}{R^2} \to 0.$$

Функция f имеет особые точки $3i$ и $-3i$. В верхней полуплоскости расположен только простой полюс $3i$.

$$\operatorname*{res}_{3i} f = \frac{e^{iaz}}{z+3i}\Big|_{z=3i} = \frac{e^{-3a}}{6i}.$$

По теореме,

$$I_1 = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{3i} f = \frac{\pi e^{-3a}}{3}.$$

Отсюда $I = \mathrm{Re}(I_1) = \dfrac{\pi}{3e^{3a}}$.

Заметим, что эта формула работает и при $a = 0$. Случай $a < 0$ можно свести к случаю $a > 0$ из-за чётности косинуса:

$$\cos(ax) = \cos(|a| \cdot x).$$

При этом интеграл равен $\frac{\pi}{3e^{3|a|}}$.

Ответ: $I = \dfrac{\pi}{3e^{3|a|}}$. □