Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
1-е занятие. Вычисление несобственных интегралов с помощью дифференцирования по параметру

$\boxed{\text{T1}}$ Вспомнить условия применения правила Лейбница (дифференцирование по параметру под знаком интеграла).

$\boxed{3784}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx$, где $n>0$, $m\in\mathbb{N}$.

Указание. Использовать формулу $\displaystyle\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx=\frac{1}{n}$.

$\boxed{3786}$ Доказать, что интеграл Дирихле $I(\alpha)=\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$ имеет при $\alpha\neq 0$ производную, однако её нельзя найти с помощью правила Лейбница.

$\boxed{3789}$ Доказать формулу Фруллани:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\ln\frac{b}{a}\qquad(a>0,\ b>0),$$

где f — непрерывная функция, и интеграл $\displaystyle\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx$ имеет смысл при любом $A>0$.

Применяя формулу Фруллани, вычислить интегралы ($a>0$, $b>0$):

$$\boxed{3791}\quad\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}\,dx;\qquad\boxed{\text{A1}}\quad\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{th}ax-\operatorname{th}bx}{x}\,dx.$$

С помощью дифференцирования по параметру вычислить следующие интегралы ($\alpha>0$, $\beta>0$):

$$\boxed{3793}\quad\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx.\qquad\boxed{3795}\quad\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx.$$

Домашнее задание № 1
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{3785}$ Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Указание. Использовать формулу $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0)$.

$\boxed{\text{T2}}$ Доказать обобщение формулы Фруллани:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln\frac{b}{a} \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

Здесь f — непрерывная функция, $f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, и при любом $A > 0$ сходится интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)-f(+\infty)}{x}\,dx$.

Применяя формулу Фруллани, вычислить интегралы ($a > 0$, $b > 0$):

$\boxed{3790}$ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx$; $\quad$ $\boxed{3792}$ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$.

С помощью дифференцирования по параметру вычислить следующие интегралы:

$\boxed{3794}$ $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

$\boxed{3796}$ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx\,dx \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

$\boxed{1828 \text{ (повт.)}}$ Найти неопределённый интеграл $\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

Ответ: $\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C$.

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр 1-е занятие. Конспект. Вычисление несобственных интегралов с помощью дифференцирования по параметру.

$\boxed{\text{Т1}}$ Вспомнить условия применения правила Лейбница (дифференцирование по параметру под знаком интеграла).

Решение. Рассматривается интеграл, зависящий от параметра:

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \qquad (y \in Y). \tag{1}$$

Вопрос в том, при каких достаточных условиях будет

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx \qquad (y \in Y). \tag{2}$$

В случае собственного интеграла достаточно непрерывности функций f и f'_y на декартовом произведении $(a,b) \times Y$. Если интеграл несобственный, то появляются дополнительные условия: сходимость исходного интеграла (1) и равномерная сходимость интеграла от производной, который записан в правой части (2). □

$\boxed{3784}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx,$ где $n > 0$, $m \in \mathbb{N}$.

Указание. Использовать формулу $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}.$

Решение. Рассмотрим формулу

$$\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}.$$

Продифференицуем обе части m раз по параметру n:

$$\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx = \frac{(-1)^m \cdot m!}{n^{m+1}}. \tag{3}$$

Это ответ. Осталось обосновать законность дифференцирования по параметру под знаком интеграла.

При $n < 1$ интеграл $\int_0^1 x^{n-1}\,dx$ несобственный, но он сходится, так как $n-1 > -1$. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и докажем, что интеграл от производной сходится равномерно при $n > \varepsilon$ вблизи особой точки $x = 0$. Применим признак Вейерштрасса:

$$|x^{n-1}\ln^m x| \overset{\text{так как } x<1}{=} \frac{1}{x^{1-n}}\ln^m\frac{1}{x} \overset{x<x_0}{\leqslant} \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\varepsilon/2} = \frac{1}{x^{1-\varepsilon/2}}.$$

Как известно, интеграл $\int_0^{x_0}\frac{1}{x^{1-\varepsilon/2}}\,dx$ сходится. Итак, формула (3) доказана при $n > \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то формула (3) верна при любом $n > 0$. $\square$

$\boxed{3786}$ Доказать, что интеграл Дирихле $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$ имеет при $\alpha \neq 0$ производную, однако её нельзя найти с помощью правила Лейбница.

Решение. Вычислим $I(\alpha)$ с помощью замены $\alpha x = t$:

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, при $\alpha \neq 0$ функция $I(\alpha)$ является константой, и $I'(\alpha) = 0$. Если же попытаться продифференцировать по параметру под знаком интеграла, то получим следующий несобственный интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty}\cos\alpha x\,dx.$$

Этот интеграл расходится. Действительно, $\int_0^L\cos\alpha x\,dx = \frac{\sin\alpha L}{\alpha}$, а это выражение не имеет предела при $L \to +\infty$. $\square$

$\boxed{3789}$ Доказать формулу Фруллани:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a} \qquad (a > 0,\ b > 0),$$

где f — непрерывная функция, и интеграл $\displaystyle\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ имеет смысл при любом $A > 0$.

Решение. Без ущерба общности можем и будем считать, что $a < b$. Несобственный интеграл в левой части имеет особые точки 0 и $+\infty$. Рассмотрим интеграл от A до $+\infty$ и представим его в виде разности интегралов. Сделаем в них замены $ax = t$ и $bx = t$, соответственно:

$$I(A) = \int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int\limits_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,dx =$$

$$= \int\limits_{aA}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int\limits_{bA}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int\limits_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

По теореме о среднем, последний интеграл равен

$$\int\limits_{aA}^{bA} \frac{f(\xi_A)}{t}\,dt = f(\xi_A)\ln\frac{bA}{aA} = f(\xi_A)\ln\frac{b}{a},$$

где ξ_A — некоторая промежуточная точка, $aA < \xi_A < bA$. Если $A \to 0$, то $\xi_A \to$ и $f(\xi_A) \to f(0)$, потому что функция f непрерывна. Следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = \lim_{A\to 0} I(A) = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

□

Применяя формулу Фруллани, вычислить интегралы ($a > 0$, $b > 0$):

$\boxed{3791}$ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\,dx.$

Решение. При любом $x_0 > 0$ интеграл $\displaystyle\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится по признаку Дирихле, поэтому можно применить готовую формулу Фруллани. Получаем ответ $\sin(0)\ln\frac{b}{a}$, т. е. 0. □

$\boxed{\text{A1}}$ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} ax - \operatorname{th} bx}{x}\, dx.$

Решение. Вспоминаем, что $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Отсюда следует, что $\operatorname{th} x \to 1$ при $x \to +\infty$, и несобственные интегралы вида $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x}{x}\, dx$ расходятся по признаку сравнения в предельной форме: $\dfrac{\operatorname{th} x}{x} \sim \dfrac{1}{x}$.

Выход очень прост: представить $\operatorname{th} ax - \operatorname{th} bx$ в виде $(\operatorname{th} ax - 1) - (\operatorname{th} bx - 1)$ и положить $f(x) = \operatorname{th} x - 1$. Сходимость интегралов получаем с помощью признака сравнения:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\operatorname{th} x - 1}{x} = \frac{2e^{-x}}{x(e^x + e^{-x})} \overset{x>1}{<} \frac{2}{e^x}.$$

Применяя формулу Фруллани для функции $f(x) = \operatorname{th} x - 1$. Получится ответ $(\operatorname{th}(0) - 1) \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{a}{b}$. □

С помощью дифференцирования по параметру вычислить следующие интегралы:

$\boxed{3793}$ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\, dx \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$

Решение. Доопределим подынтегральную функцию в точке $x = 0$ и рассмотрим её производную по α (параметр β считаем фиксированным):

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \qquad f'_\alpha(x, \alpha) = -\alpha x e^{-\alpha x^2}.$$

Легко видеть, что $\lim_{x \to +0} f(x, \alpha) = 0 = f(0)$, так что точка $x = 0$ не является особой точкой интеграла. Интеграл от $f(x, \alpha)$ сходится по признакам сравнения:

$$\frac{|e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}|}{x} \overset{x>1}{<} \frac{1}{e^{\alpha x}} + \frac{1}{e^{\beta x}}.$$

Интеграл от $f'_\alpha(x, \alpha)$ будет сходиться из-за экспоненты с отрицательным показателем. Чтобы обеспечить равномерную сходимость, выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и потребуем $\alpha > \varepsilon$. Тогда

$$|f'_\alpha(x, \alpha)| = x e^{-\alpha x^2} \leqslant \frac{x}{e^{\varepsilon x^2}} < \frac{x}{\varepsilon^2 x^4 / 2} = \frac{2}{\varepsilon^2 x^3}.$$

Здесь использовано неравенство $e^t > \frac{t^2}{2}$, которое следует из формулы Тейлора. Итак, при $\alpha > \varepsilon$ можно использовать формулу Лейбница:

$$I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2} = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Отсюда $I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \varphi(\beta)$ при $\alpha > \varepsilon$. Очевидно, $I(\beta) = 0$. Поэтому $\varphi(\beta) = \frac{1}{2}\ln\beta$, и $I(\alpha) = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$ при $\alpha > \varepsilon$ и $\beta > \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то ответ справидлив для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$. □

$\boxed{3795}$ $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\, dx \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

Решение. Здесь выгодно считать α и β константами, а дифференцировать по параметру m. Сначала доопределим функцию в точке 0:

$$f(x,m) = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin mx, & x \geqslant 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad f'_m(x,m) = (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})\cos mx.$$

Легко видеть, что функции f и f'_m непрерывны на $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, точка $x = 0$ не является особой. Функции $|f(x,m)|$ и $|f'_m(x,m)|$ при $x \geqslant 1$ можно оценить сверху через $e^{-\alpha x} + e^{-\beta x}$, поэтому несобственные интегралы сходятся равномерно. Применяем правило Лейбница:

$$I'(m) = \int\limits_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})\cos mx\, dx =$$
$$= \frac{-\alpha\cos mx + m\sin mx}{\alpha^2 + m^2}\, e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{-\beta\cos mx + m\sin mx}{\beta^2 + m^2}\, e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty} =$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2} - \frac{\beta}{\beta^2 + m^2}.$$

Отсюда $I(m) = \operatorname{arctg}\frac{m}{\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{m}{\beta} + C$. Подставляя $m = 0$, получим, что $C = 0$. Ответ: $I(m) = \operatorname{arctg}\frac{m}{\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{m}{\beta}$. □