Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
2-е занятие. Эйлеровы интегралы (функции Γ и B)

Определения гамма-функции и бета-функции:

$$\boxed{\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.} \qquad \boxed{\mathrm{B}(x,y) = \int\limits_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.}$$

$\boxed{3841}$ Доказать, что функция $\Gamma(x)$ непрерывна и обладает непрерывными производными всех порядков в области $x > 0$.

$\boxed{\text{A1}}$ Доказать формулу понижения: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$\boxed{\text{A2}}$ Вычислить $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$, $\Gamma(n)$.

Связь между B- и Γ-функцией, формула дополнения для Γ-функции (без док-ва):

$$\boxed{\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.} \qquad \boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.}$$

$\boxed{\text{A3}}$ Вычислить $\Gamma(1/2)$, $\Gamma(3/2)$, $\Gamma(5/2)$, $\Gamma(7/2)$, $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

$\boxed{\text{A4}}$ Другое представление B-функции (доказать дома):

$$\mathrm{B}(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du.$$

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

$\boxed{3844}$ $\displaystyle\int\limits_0^{a} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad (a > 0).$ $\qquad$ $\boxed{3845}$ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\, dx.$

$\boxed{3856}$ $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx.$

$\boxed{3862}$ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x\, dx \quad (a > 0).$ $\qquad$ $\boxed{3863}$ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x}\, dx.$

Домашнее задание № 2
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{3842}$ Доказать, что бета-функция $\mathrm{B}(x, y)$ непрерывна и обладает производными всех порядков в области $x > 0$, $y > 0$.

$\boxed{\mathrm{A1}}$ Вычислить значение $\Gamma(1/2)$, не пользуясь формулой дополнения. Подсказка: с помощью подходящей замены свести к интегралу Пуассона.

$\boxed{\mathrm{A2}}$ С помощью подходящей замены переменной доказать формулу:

$$\mathrm{B}(x, y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du.$$

$\boxed{3843}$ $\int\limits_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx.$ $\boxed{3846}$ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

$\boxed{3847}$ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{1+x^4}.$ $\boxed{3848}$ $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos^4 x\, dx.$

$\boxed{3849}$ $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n > 1).$ $\boxed{3850}$ $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\, dx \quad (n \in \mathbb{Z},\ n > 0).$

$\boxed{3857}$ $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^n\, x\, dx.$ $\boxed{3861}$ $\int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx.$

$\boxed{3864}$ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln^2 x}{1+x}\, dx.$ $\boxed{3864.1}$ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3}\, dx.$

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
2-е занятие. Конспект.
Эйлеровы интегралы (Γ- и B-функции)

$\boxed{3841}$ Доказать, что функция $\Gamma(x)$ непрерывна и обладает непрерывными производными всех порядков в области $x > 0$.
Решение. Заметим, что n-я производная по параметру от подынтегральной функции равна

$$f_n(t,x) = t^{x-1}\ln^n t \cdot e^{-t}.$$

Достаточно доказать, что интеграл $\int_0^{+\infty} f_n(t,x)\,dt$ равномерно сходится на любом интервале вида (a,b), где $0 < a < b < +\infty$, так как объединение таких интервалов равно $(0,+\infty)$. Имеется две особые точки: 0 и $+\infty$. Точкой 1 разобьём несобственный интеграл на два несобственных интеграла, и для каждого из них применим признак Вейерштрасса:

$$|t^{x-1}\ln^n t \cdot e^{-t}| \overset{t\leqslant 1}{\leqslant} \left(\frac{1}{t}\right)^{1-x} \ln^n \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{t^{1-a}} \cdot \frac{1}{t^{a/2}} \leqslant \frac{1}{t^{1-a/2}}.$$
$$|t^{x-1}\ln^n t \cdot e^{-t}| \overset{t\geqslant x_0>1}{\leqslant} t^b \cdot t^n \cdot \frac{1}{t^{n+b+2}} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Здесь использован тот факт, что на бесконечности логарифм растёт медленнее, чем степенная функция с положительным показателем, а степенная функция растёт медленнее, чем экспонента. □

$\boxed{\text{A1}}$ Доказать формулу понижения: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Решение. Интегрируем по частям:

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^x\, e^{-t}\,dt = \left[\begin{array}{cc} u = t^x, & dv = e^{-t}\,dt \\ du = xt^{x-1}\,dx, & v = -e^{-t} \end{array}\right] =$$
$$= -t^x e^{-t}\big|_0^{+\infty} + \int xt^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x).$$

При вычислении предела $\lim\limits_{t\to+\infty} t^x e^{-t}$ воспользовались тем фактом, что на бесконечности экспонента растёт быстрее, чем степенная функция. □

$\boxed{\text{A2}}$ Вычислить $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$, $\Gamma(n)$.
Решение. Для вычисления $\Gamma(1)$ используем определение:

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} t^0 e^{-t}\,dt = e^{-t}\big|_{+\infty}^{0} = 1.$$

Далее используем формулу понижения:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1,$$
$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2,$$
$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 6.$$

С помощью математической индукции нетрудно доказать, что

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!.}$$

□

$\boxed{\text{A3}}$ Вычислить $\Gamma(1/2)$, $\Gamma(3/2)$, $\Gamma(5/2)$, $\Gamma(7/2)$, $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.
Решение. $\Gamma(1/2)$ проще всего вычислить с помощью формулы дополнения (при $x = 1/2$):

$$\Gamma(1/2) \cdot \Gamma(1/2) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi,$$

откуда $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Далее используем формулу понижения:

$$\Gamma(3/2) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma(1/2) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi};$$
$$\Gamma(5/2) = \frac{3}{2} \cdot \Gamma(3/2) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \sqrt{\pi};$$
$$\Gamma(7/2) = \frac{5}{2} \cdot \Gamma(5/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \cdot \sqrt{\pi}.$$

С помощью математической индукции легко доказать, что

$$\boxed{\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi} \qquad (n \in \mathbb{Z},\ n > 0).}$$

□

$\boxed{\text{A4}}$ Другое представление B-функции (доказать дома):

$$\mathrm{B}(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du.$$

Подсказка. В интеграле, определяющем B-функцию, сделать замену $t = \frac{u}{1+u}$. □

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

$\boxed{3844}$ $\displaystyle\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0).$

Решение. Сделаем замену $x=a\sqrt{t}$, $dx=\frac{a\,dt}{2\sqrt{t}}$:

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{2}\int\limits_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\,dt = \frac{a^4}{2}\,\mathrm{B}(3/2,3/2) =$$

$$= a^4\cdot\frac{\Gamma(3/2)^2}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

□

$\boxed{3845}$ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx.$

Решение. Сравнивая с другим представлением B-функции, видим, что наш интеграл равен

$$\mathrm{B}(5/4,3/4) = \frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\cdot\Gamma(1/4)\Gamma(3/4).$$

Применяем формулу дополнения:

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{4}.$$

□

$\boxed{3856}$ $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,dx.$

Решение. Сначала естественно сделать замену $z=\sin x$. При этом один косинус отделяем для дифференциала:

$$I=\int\limits_0^1 z^m(\sqrt{1-z^2})^{n-1}\,dz.$$

Теперь делаем замену $t=z^2$, отделяя один z для дифференциала:

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right).$$

Из определения B-функции появляются условия $m > -1$, $n > -1$. $\square$

$\boxed{3863}$ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx.$

Решение. Обозначим этот интеграл через $I(p)$. Легко видеть, что $I(p) = F'(p)$, где

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \mathrm{B}(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Из определения B-функции получаем условие $0 < p < 1$. Далее,

$$I(p) = F'(p) = -\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}.$$

$\square$