Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
3-е занятие. Криволинейные интегралы второго рода

$\boxed{\text{A1}}$ Вывести формулу понижения для $\cos^3 t$ с помощью формулы Эйлера: $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. Найти интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 t\, dt$.

$\boxed{\text{A2}}$ Параметризовать следующие кривые:
(1) отрезок прямой линии от $(2, -3)$ к $(3, -5)$;
(2) отрезок прямой линии от $(0, 1)$ к $(0, -2)$;
(3) дуга окружности с центром $(0, 0)$ от $(1, 0)$ к $(-1, 0)$;
(4) дуга окружности с центром $(0, 0)$ от $(0, -1)$ к $(-1, 0)$;
(5) дуга параболы с центром $(0, 0)$ и осью Ox, от $(4, -2)$ до $(4, 2)$.

Вычислить следующие интегралы:

$\boxed{\text{A3}}$ $I = \displaystyle\int_\varphi xy\, dx - x^2\, dy$, где φ — кривая от точки $A(1, 0)$ к точке $B(0, 1)$, имеющая следующую форму:
(1) отрезок прямой линии;
(2) дуга окружности с центром $O(0, 0)$;
(3) ломаная линия, состоящая из отрезков AO и OB.

$\boxed{4251}$ $\displaystyle\int_\varphi (x^2 + y^2)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy$, где φ — кривая

$$y = 1 - |1 - x|, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

$\boxed{4252}$ $\displaystyle\oint_\varphi (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$, где φ — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующие криволинейные интегралы:

$\boxed{4259}$ $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\, dx + y\, dy.$ $\boxed{\text{A4}}$ $\displaystyle\int_{(-1,2)}^{(3,1)} y\, dx + (x + 2y)dy.$

$\boxed{4263}$ $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\, dx - x\, dy}{x^2}$ вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

Домашнее задание № 3
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Вычислить следующие криволинейные интегралы второго рода:

$\boxed{4248}$ $\displaystyle\int\limits_{\varphi} x\,dy - y\,dx$, где φ — кривая от точки $O(0,0)$ к точке $A(1,2)$, имеющая следующую форму:
(1) отрезок прямой линии;
(2) парабола, ось которой есть Oy;
(3) ломаная линия, состоящая из отрезка OB оси Ox и отрезка BA, параллельного оси Oy.

$\boxed{4249}$ $\int_{\varphi} x\,dy + y\,dx$ для кривых из задачи 4248.

$\boxed{4250}$ $\int_{\varphi}(x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, где φ — парабола

$$y = x^2, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

$\boxed{4253}$ $\oint_{\varphi}(2a - y)\,dx + x\,dy$, где φ — арка циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

$\boxed{4255}$ $\displaystyle\oint\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, где $ABCDA$ — контур квадрата с вершинами $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$.

$\boxed{4257}$ $\displaystyle\oint\limits_{OmAnO} dy\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} - dx$, где OmA — отрезок параболы $y = x^2$ и OnA — отрезок прямой $y = x$.

Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующие криволинейные интегралы:

$\boxed{4258}$ $\displaystyle\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy + y\,dx.$ $\boxed{4260}$ $\displaystyle\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y)\,dx + (x - y)\,dy.$

$\boxed{4264}$ $\displaystyle\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ вдоль путей, не проходящих через $(0,0)$.

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
3-е занятие. Конспект.
Криволинейные интегралы второго рода

Формула понижения для $\cos^3 t$ (повторение)

$\boxed{\text{А1}}$ Вывести формулу понижения для $\cos^3 t$ с помощью формулы Эйлера: $\cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$. Найти интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 t\,dt$.

Решение.

$$\cos^3 t = \frac{e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it}}{8} = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 t\,dt = \left(\frac{1}{12}\sin 3t + \frac{3}{4}\cos t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{12}+\frac{3}{4} = \frac{2}{3}.$$

□

Параметризация кривых

$\boxed{\text{А2}}$ Параметризовать следующие кривые:
(1) отрезок прямой линии от $(2,-3)$ к $(3,-5)$;
(2) отрезок прямой линии от $(0,1)$ к $(0,-2)$;
(3) дуга окружности с центром $(0,0)$ от $(1,0)$ к $(0,1)$;
(4) дуга окружности с центром $(0,0)$ от $(0,-1)$ к $(-1,0)$;
(5) дуга параболы с центром $(0,0)$ и осью Ox, от $(4,-2)$ до $(4,2)$.
Решение.

$$\begin{aligned}
&1)\ x = 2+t,\ y = -3-2t, && t\in[0,1];\\
&2)\ x = 0,\ y = 1-3t, && t\in[0,1];\\
&3)\ x = \cos t,\ y = \sin t, && t\in[0,\pi];\\
&4)\ x = -\sin t,\ y = -\cos t, && t\in[0,\pi/2];\\
&5)\ x = t^2,\ y = t, && t\in[-2,2];
\end{aligned}$$

□

Вычисление интегралов второго рода

$\boxed{\text{A3}}$ $I = \int\limits_{\varphi} xy\,dx - x^2\,dy$, где φ — кривая от точки $A(1,0)$ к точке $B(0,1)$, имеющая следующую форму:

(1) отрезок прямой линии;
(2) дуга окружности с центром $O(0,0)$;
(3) ломаная линия, состоящая из отрезков AO и OB.

Решение.

(1) $x = 1-t$, $y = t$, $t \in [0,1]$,

$$I = \int\limits_0^1 (1-t)t \cdot (-dt) - (1-t)^2\,dt = \int\limits_0^1 (t-1)\,dt = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

(2) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$,

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t\,dt - \cos^3 t\,dt) =$$

$$= -\int\limits_0^1 u^2 du - \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \cos 3t\,dt - \frac{3}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \cos t\,dt = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1.$$

(3) На отрезке AO: $x = 1-t$, $y = 0$, $t \in [0,1]$, $I = 0$. На отрезке OB: $x = 0$, $y = t$, $t \in [0,1]$, $I = 0$.

Заметим, что здесь не выполняется условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. □

$\boxed{\text{A4}}$ $I = \int\limits_{\varphi} 2xy\,dx + x^2\,dy$, где φ — кривые из предыдущей задачи.

Решение.

(1) $x = 1-t$, $y = t$, $t \in [0,1]$,

$$I = \int\limits_0^1 \big(2(1-t)t \cdot (-dt) + (1-t)^2 \cdot dt\big) = \int\limits_0^1 (3t^2 - 4t + 1)\,dt = 0.$$

(2) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$,

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} (-2\cos t \sin^2 t\,dt + \cos^3 t\,dt) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0.$$

(3) $I = 0$.

Заметим, что здесь выполняется условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. □

$\boxed{4251}$ $\displaystyle\int_\varphi (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, где φ — кривая

$$y = 1 - |1-x|, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

Решение. Разбиваем на сегменты $[0,1]$ и $[1,2]$: $y = \begin{cases} x, & x \in [0,1]; \\ x-2, & x \in [1,2]. \end{cases}$

Вычисляем интеграл:

$$I = \int_0^1 2x^2\,dx + \int_1^2 (2x^2-4x+4)dx + (4x-4)\cdot(-dx) =$$

$$= \frac{2}{3} + \int_1^2 (2x^2-8x+8)\,dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

□

$\boxed{4252}$ $\displaystyle\oint_\varphi (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, где φ — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

Решение. Используем параметризацию $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $\in [0, 2\pi]$:

$$I = \int_0^{2\pi} (a\cos t + b\sin t)\cdot(-a\sin t\,dt) + (a\cos t - b\sin t)\cdot b\cos t\,dt = 0.$$

□

Интеграл от полного дифференциала

Если в области D существует такая функция $u(x,y)$, что

$$P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y},$$

то для любой кусочно-гладкой кривой γ, лежащей в области D,

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = u(B) - u(A),$$

где A и B — соответственно начало и конец кривой γ.

$\boxed{4259}$ $\displaystyle\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx + y\,dy.$

Решение. Сначала проверим необходимое условие существования полного дифференциала, т. е. равенство $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (x)'_y = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = (y)'_x = 0.$$

Угадаем такую функцию $u(x,y)$, что $d(u(x,y)) = x\,dx + y\,dy$. Легко сообразить, что подходит функция $u(x,y) = \dfrac{1}{2}d(x^2+y^2)$. Более подробно:

$$u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}, \qquad P(x,y) = x, \qquad Q(x,y) = y.$$

Значит, $I = u(3,-4) - u(0,1) = \frac{25-1}{2} = 12.$ $\square$

$\boxed{\text{A5}}$ $\displaystyle\int\limits_{(-1,2)}^{(3,1)} y\,dx + (x+2y)dy.$

Решение. Сначала проверяем необходимое условие: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Теперь угадаем такую функцию $u(x,y)$, что $d(u(x,y)) = y\,dx + (x+2y)\,dy$. Можно сообразить, что подходит функция

$$u(x,y) = xy + y^2.$$

Значит, $I = u(3,1) - u(-1,2) = 4 - 2 = 2.$ $\square$

$\boxed{4263}$ $\displaystyle\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

Решение. Сначала проверим необходимое условие существования полного дифференциала, т. е. равенство $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$:

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2}, \qquad Q(x,y) = -\frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}.$$

Легко сообразить, что $u(x,y) = -\dfrac{y}{x}$. Отсюда $I = -\frac{2}{1} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$ $\square$