Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр 4-е занятие. Потенциал поля. Гармонические функции

$\boxed{\text{A1}}$ Вычислить $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=1} p\,dx + q\,dy$, где $p(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.
Существует ли потенциал поля (p,q) в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующий интеграл:

$\boxed{4267}$ $\displaystyle\int\limits_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ вдоль путей, не пересекающих прямой $y = x$.

Найти потенциал u, если известен полный дифференциал du:

$\boxed{\text{A2}}$ $du = (e^y \cos x + 3x^2 y)\,dx + (e^y \sin x + x^3 - e^y)\,dy$.

$\boxed{4272}$ $du = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$.

$\boxed{\text{A3}}$ Найти потенциал поля $\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ в плоскости с разрезом $\{x = y,\ x \geqslant 0\}$, принимающий в точке $(0,1)$ значение 0.

Определение 1. Функцию $u \in C^2(D)$ называют *гармонической* в области D, если $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$ для любой точки $(x,y) \in D$.

Определение 2. Пусть $u, v \in C^2(D)$ — гармонические функции в области u. Эти функции называют *сопряжёнными*, если они связаны уравнениями Коши-Римана: $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}}$ для любой точки $(x,y) \in D$.

Проверить, что функция является гармонической, и найти сопряжённую к ней гармоническую функцию:

$\boxed{1.165}$ $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Домашнее задание № 4
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Вычислить $\oint\limits_{\varphi} p\,dx + q\,dy$, где $p(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, φ — замкнутая ломаная с вершинами $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$, $D(1,-1)$.

Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующие интегралы:

$\boxed{4268}$ $\displaystyle\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) dy$ вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

$\boxed{4269}$ $\displaystyle\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} e^x\left(\cos y\,dx - \sin y\,dy\right)$.

Найти потенциал u, если известен его полный дифференциал du:

$\boxed{4271}$ $du = (x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - y^2)\,dy$.

$\boxed{4273}$ $du = \dfrac{(x^2 + 2xy + 5y^2)\,dx + (x^2 - 2xy + y^2)\,dy}{(x+y)^3}$.

$\boxed{4274}$ $du = e^x\left(e^y(x - y + 2) + y\right) dx + e^x\left(e^y(x-y) + 1\right) dy$.

$\boxed{\text{A2}}$ Найти потенциал поля $\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ в плоскости с разрезом $\{y = 0,\ x \leqslant 0\}$, принимающий в точке $(1,0)$ значение 0.

$\boxed{\approx 4270 \text{ (доп. задание)}}$ Пусть f — непрерывная функция на $\mathbb{R}$. Построить такую функцию $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$, что

$$du = f(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy).$$

Проверить, что следующие функции являются гармоническими, и найти сопряжённые к ним гармонические функции:

$\boxed{1.159}$ $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$. $\boxed{1.160}$ $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
4-е занятие. Конспект.
Потенциал поля. Гармонические функции

Повторение

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть $p(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Вычислить $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=1} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$.

Выяснить, существует ли потенциал от $p\,dx + q\,dy$ в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Решение. Используя параметризацию $x = \cos t$, $y = \sin t$, где $t \in [0, 2\pi]$, получим:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = 2\pi.$$

Заметим, что в этом примере выполняется необходимое условие существования потенциала:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Но отсюда ещё не следует существование потенциала, так как область не односвязна (выколото начало координат). Если бы потенциал существовал, то интеграл по замкнутому контуру был бы равен 0. Следовательно, потенциала не существует. $\square$

Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующий интеграл:

$\boxed{4267}$ $\displaystyle\int\limits_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ вдоль путей, не пересекающих прямой $y = x$.

Решение. Видим, что

$$p(x,y) = -\frac{y}{(x-y)^2}, \quad q(x,y) = \frac{x}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{x+y}{(x-y)^3} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Следовательно, в односвязной области $y < x$ существует потенциал. Поэтому интегрировать можно по любому пути в области $y < x$ с началом $(0,-1)$ и концом $(1,0)$. Чтобы упростить знаменатель, выберем путь

$$y = x - 1 \qquad (x \in [0,1]).$$

Получим: $I = \int_0^1 dx = 1$. Другой способ решения — угадать потенциал поля: $u = \frac{y}{x-y}$. $\square$

Вычисление потенциала

Найти потенциал u, если известен полный дифференциал du:

$\boxed{\text{A2}}$ $du = (e^{2y}\cos x + 3x^2 y)\,dx + (2e^{2y}\sin x + x^3 - e^y)\,dy.$

Решение. Необходимое условие выполнено:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2e^{2y}\cos x + 3x^2 = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Из условия на u'_x находим $u(x,y)$ с точностью до произвольного слагаемого, зависящего от y (интегрируем по x):

$$u'_x = e^{2y}\cos x + 3x^2 y \implies u = e^{2y}\sin x + x^3 y + C(y).$$

Теперь находим $C(y)$ из условия на u'_y:

$$u'_y = e^{2y}\sin x + x^3 + C'(y) = e^{2y}\sin x + x^3 - e^y.$$

<u>Ответ</u>: $u = e^{2y}\sin x + x^3 y - e^y + C.$ $\square$

$\boxed{4272}$ $du = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$

Решение. Необходимое условие выполнено:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{3(x^2+y^2)}{(3x^2 - 2xy + 3y^2)^2} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Интегрируя функцию $u'_x(x,y) = p(x,y)$ по x, находим $u(x,y)$ с точностью до произвольного слагаемого, зависящего от y:

$$u(x,y) = \int \frac{y\,dx}{3\left(\left(x - \frac{y}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}y^2\right)} = \frac{y}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}\,y}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3x - y}{2\sqrt{2}\,y} + C(y) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x-y}{2\sqrt{2}y} + C(y).$$

Чтобы найти функцию $C(y)$, приравниваем $u'_y(x,y)$ к $q(x,y)$. Получается, что $C'(y) = 0$, откуда $C(y) = C$.

<u>Ответ</u>: $u(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-y}{2\sqrt{2}y} + C.$ $\square$

Заметим, что функция $\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x-y}{2\sqrt{2}y}$ из ответа к задаче 4272 имеет разрывы. Линии разрывов делят плоскость на несколько областей. В каждой области можно выбирать свою константу C. Эти константы можно пытаться подбирать так, чтобы сделать функцию $u(x,y)$ непрерывной. Непрерывности на всей плоскости не всегда можно добиться, но можно обеспечить непрерывность в односвязной области.

Рассмотрим поле из примера A1. Потенциал в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ не существует, но можно найти потенциал в какой-нибудь односвязной области. Например, в плоскости с разрезом.

$\boxed{\text{A3}}$ Найти потенциал поля $\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ в плоскости с разрезом $\{x=y,\ x \geqslant 0\}$, принимающий в точке $(0,1)$ значение 0.
Решение. Видим, что

$$u(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C.$$

Прямая $x=0$, в которой теряется непрерывность функции $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, и луч $\{x=y,\ x \geqslant 0\}$, вырезанный по условию, делят плоскость на 3 области:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y)\colon x>0,\ y>x\},\\ D_2 &= \{(x,y)\colon x<0\},\\ D_3 &= \{(x,y)\colon x>0,\ y<x\}. \end{aligned}$$

Константу C находим отдельно в каждой из областей D_1, D_2, D_3, обеспечивая непрерывность функции. Найдём C_1:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ x>0}} u(x,y) = \frac{\pi}{2} + C_1 = 0 \implies C_1 = -\frac{\pi}{2}.$$

Найдём C_2:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ x<0}} u(x,y) = -\frac{\pi}{2} + C_2 = 0 \implies C_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Найдём значение $u(x,y)$ на луче $\{x=0,\ y<0\}$:

$$u(0,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y)\\ x<0}} u(x,y) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

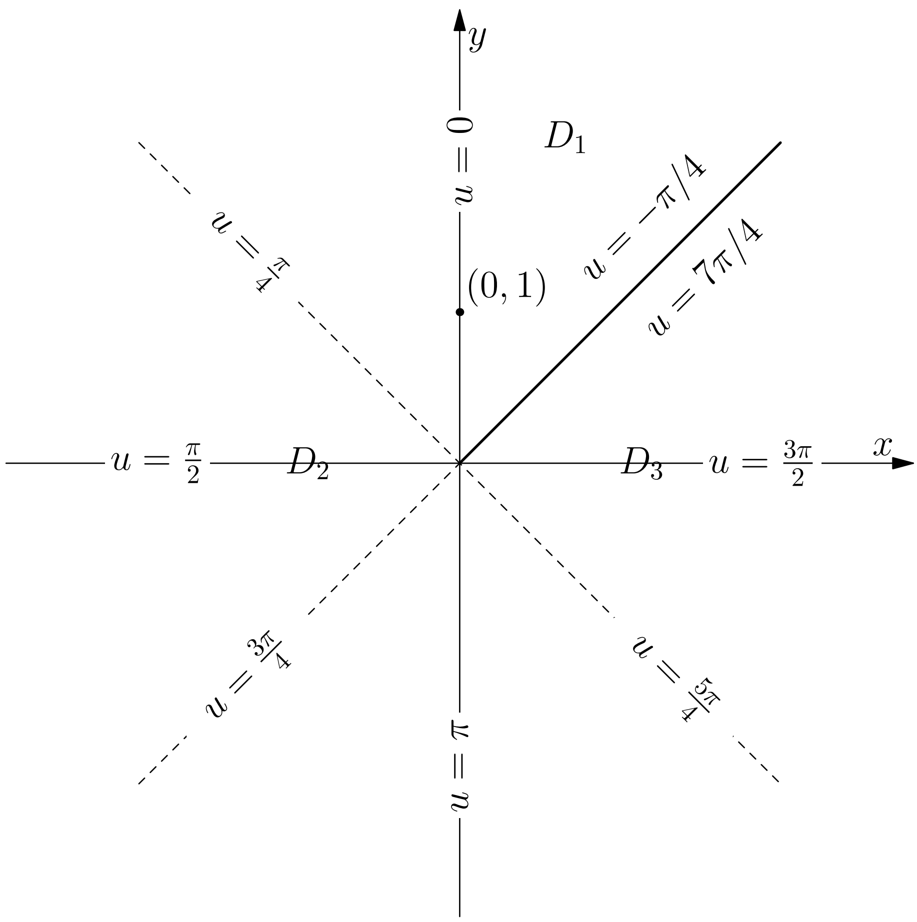
Наконец, найдём C_3 из условия непрерывности на луче $\{x=0,\ y<0\}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,-1)\\ x>0}} u(x,y) = -\frac{\pi}{2} + C_3 = \pi \implies C_3 = \frac{3\pi}{2}.$$

Ответ:

$$u(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}, & x>0,\ y>x; \\ 0, & x=0,\ y>0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}, & x<0; \\ \pi, & x=0,\ y<0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{3\pi}{2}, & x>0, y<x. \end{cases}$$

Очевидно, функция u принимает одно и то же значение на каждом луче, исходящем из начала координат. На рисунке показаны значения функции u на некоторых лучах:



$\square$

Определение 3. Функцию $u \in C^2(D)$ называют *гармонической* в области D, если $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$ для любой точки $(x, y) \in D$.

Определение 4. Пусть $u, v \in C^2(D)$ — гармонические функции в области u. Эти функции называют *сопряжёнными*, если они связаны уравнениями Коши-Римана: $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}}$ для любой точки $(x, y) \in D$.

Проверить, что функция является гармонической, и найти сопряжённую к ней гармоническую функцию:

$\boxed{1.165}$ $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

Решение. Найдём первые производные:

$$u'_x = 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad u'_y = -2y + 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

вторые производные:

$$u''_{xx} = 2 + \frac{2y^3 - 6x^2 y}{(x^2 + y^2)^3}, \qquad u''_{yy} = -2 - \frac{2y^3 - 6x^2 y}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Отсюда $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, т. е. функция u является гармонической. Для сопряжённой функции v получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} v'_x = 2y - 1 + \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ v'_y = 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{cases}$$

Интегрируем второе уравнение по y:

$$v = 2xy + 5y - \frac{x}{x^2 + y^2} + \varphi(x).$$

Дифференцируем по x, чтобы найти $\varphi(x)$:

$$v'_x = 2y + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \varphi'(x) = 2y - 1 + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Отсюда $\varphi'(x) = -1$, $\varphi(x) = -x + C$.
Ответ: $v(x, y) = 2xy - x + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} + C$. $\square$