Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
5-е занятие. Потенциал поля.
Гармонические функции. Комплексные числа

$\boxed{\text{A1}}$ Найти потенциал поля $\left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ в плоскости с разрезом

$$\{(x,y)\colon y=0,\ x\geqslant 0\},$$

принимающий в точке $(-1,0)$ значение 0.

$\boxed{\text{A2}}$ Показать, что функция является гармонической. Найти сопряжённую к ней гармоническую функцию в области $x>0$:

$$u = x^2 - y^2 - 3y + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

Выяснить, существуют ли гармонические функции указанного вида (отличные от постоянной), и в случае существования найти их.

$\boxed{1.169}$ $u=\varphi(x)$. $\boxed{1.171}$ $u=\varphi(y/x)$.

$\boxed{1.1}$ Выполнить указанные действия: 2) $\dfrac{1-i}{1+i}$, 4) $(1+i\sqrt{3})^3$.

$\boxed{1.2}$ Найти модули и аргументы комплексных чисел:

$$2)\ -2; \qquad 4)\ -1-i; \qquad 6)\ 2-5i; \qquad 8)\ -2-5i.$$

$\boxed{\text{A3}}$ Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:

$$a+bi\ (a\neq 0), \qquad 1+\cos\varphi + i\sin\varphi \quad (|\varphi|<\pi).$$

$\boxed{\text{A4}}$ Доказать, что $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \leqslant |z_1|\cdot|z_2|$ для любых $z_1, z_2\in\mathbb{C}$.

$\boxed{\approx 1.7,\ 1)}$ Доказать *полуаддитивность абсолютной величины* (*неравенство треугольника*):

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

$\boxed{\approx 1.9}$ Доказать *тождество параллелограмма* и выяснить его геометрический смысл:

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

$\boxed{1.4}$ Найти все значения следующих корней и построить их:

$$1)\ \sqrt[3]{1}; \qquad 3)\ \sqrt[4]{-1}; \qquad 5)\ \sqrt[8]{1}; \qquad 7)\ \sqrt{3+4i}.$$

Домашнее задание № 5
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Найти потенциал поля $\left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ в плоскости с разрезом

$$\{(x,y)\colon y=-x,\ x\leqslant 0\},$$

принимающий в точке $(0,-1)$ значение 0.

Проверить, что следующие функции являются гармоническими, и найти сопряжённые к ним гармонические функции (в указанной области):

$\boxed{\text{A2}}$ $u(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\quad (x>0)$.

$\boxed{\text{A3}}$ $u(x,y)=x^3-3xy^2+\dfrac{y}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2\neq 0)$.

Выяснить, существуют ли гармонические функции указанного вида (отличные от постоянной), и в случае существования найти их.

$\boxed{1.170}$ $u=\varphi(ax+by)\quad (a,b\in\mathbb{R})$. $\boxed{1.171}$ $u=\varphi(y/x)$.

$\boxed{1.172}$ $u=\varphi(xy)$. $\boxed{1.173}$ $u=\varphi(x^2+y^2)$.

$\boxed{1.1}$ Выполнить действия: 1) $\dfrac{1}{i}$; 3) $\dfrac{2}{1-3i}$.

$\boxed{1.2}$ Найти модули и аргументы комплексных чисел:

$$1)\ 3i;\quad 3)\ 1+i;\quad 5)\ 2+5i;\quad 7)\ -2+5i;\quad 9)\ bi\ (b\neq 0).$$

$\boxed{1.4}$ Найти все значения следующих корней и построить их:

$$2)\ \sqrt[3]{i};\quad 4)\ \sqrt[6]{-8};\quad 6)\ \sqrt{1-i};\quad 8)\ \sqrt[3]{-2+2i};\quad 9)\ \sqrt[5]{-4+3i}.$$

$\boxed{\text{A4}}$ Доказать следующие свойства операции комплексного сопряжения:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar z_1+\bar z_2,\qquad \overline{z_1z_2}=\bar z_1\cdot\bar z_2,\qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar z_1}{\bar z_2}.$$

$\boxed{1.7,\ 2)}$ Вывести из 1.7, 1), что $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$. Объяснить геометрический смысл этого неравенства.

$\boxed{1.10}$ Доказать тождество

$$|1-\bar z_1z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2).$$

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр 5-е занятие. Конспект. Потенциал поля. Гармонические функции. Комплексные числа

$\boxed{\text{А1}}$ Найти потенциал поля $\left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ в плоскости с разрезом

$$\{(x, y)\colon y = 0,\ x \geqslant 0\},$$

принимающий в точке $(-1, 0)$ значение 0.
Решение. Сначала находим общий вид потенциала с точностью до константы, как это уже делалось раньше:

$$u(x, y) = -\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C.$$

Теперь замечаем, что данный в условии разрез и прямая $x = 0$, на которой терпит разрыв функция $-\operatorname{arctg}(y/x)$, разбивают плоскость на 3 части:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y)\colon x > 0,\ y > 0\},\\ D_2 &= \{(x, y)\colon x < 0\},\\ D_3 &= \{(x, y)\colon x > 0,\ y < 0\}, \end{aligned}$$

и в каждой из этих областей слагаемое C может быть своим:

$$u(x, y) = -\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C_k \qquad (x \in D_k).$$

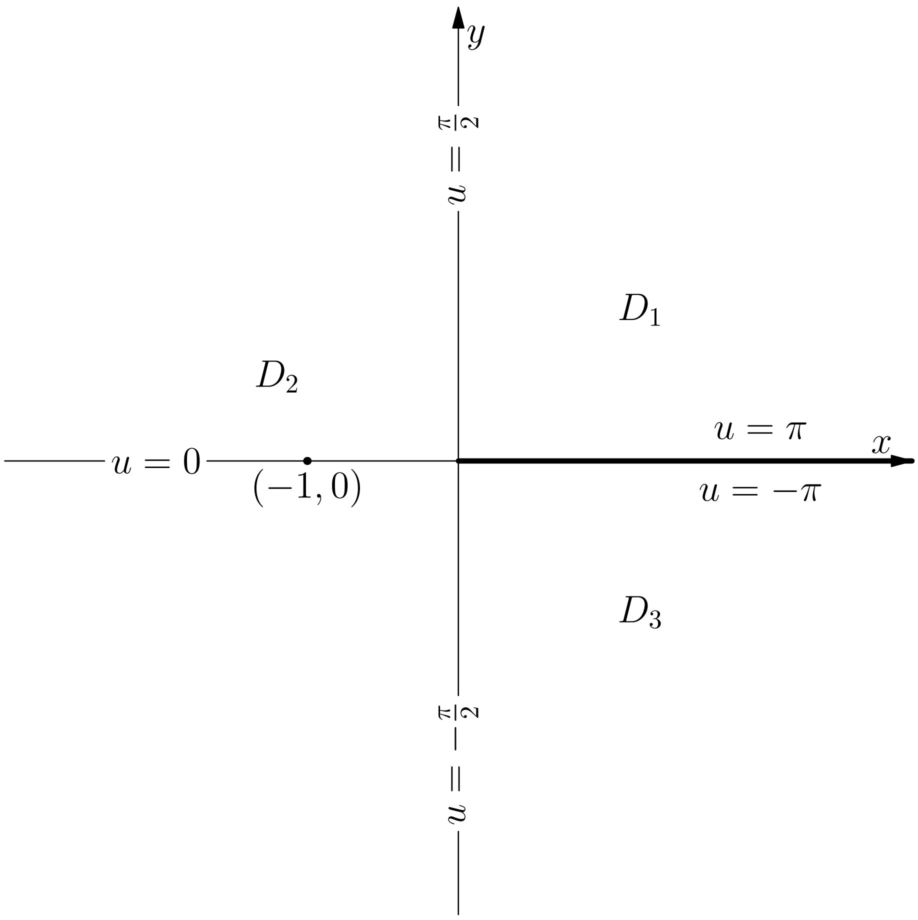
Числа C_k нужно подбирать так, чтобы обеспечить выполнение условия $u(-1, 0) = 0$ и непрерывность функции $u(x, y)$ на линиях разрыва функции $-\operatorname{arctg}(y/x)$.

Из условия $u(-1, 0) = 0$ находим $C_2 = 0$.

Заметим, что значение $\operatorname{arctg}(y/x)$ в точке $(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, где $\rho > 0$, равно

$$\begin{cases} \varphi, & \varphi \in (-\pi/2, \pi/2);\\ \varphi - \pi, & \varphi \in (\pi/2, 3\pi/2). \end{cases}$$

Важно, что если в области непрерывности функции $\operatorname{arctg}(y/x)$ изменить φ на какую-то величину $\Delta\varphi$, то на такую же величину изменится значение функции $\operatorname{arctg}(y/x)$. Следовательно, значение функции $u(x, y)$ при этом изменится на $-\Delta\varphi$. Например, при движении от луча $\varphi = \pi$ к лучу $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ значение φ увеличится на $\pi/2$, поэтому значение $u(x, y)$ уменьшится на $\pi/2$ и станет равно $-\frac{\pi}{2}$.



Рассуждая таким образом, получаем: $u(0, y) = \frac{\pi}{2}$ при $y > 0$, $u(0, y) = -\frac{\pi}{2}$ при $y < 0$, $u(x, +0) = \pi$ при $x > 0$ и $u(x, -0) = -\pi$ при $x > 0$.

Из последних двух соотношений находим $C_1 = \pi$ и $C_3 = -\pi$.

<u>Ответ</u>:

$$u(x, y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & x > 0,\ y > 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0; \\ -\operatorname{arctg}(y/x), & x < 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0; \\ -\operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Отметим, что в точках разреза функция имеет разрыв. □

$\boxed{\text{A2}}$ Показать, что функция является гармонической. Найти сопряжённую к ней гармоническую функцию в области $x > 0$:

$$u = x^2 - y^2 - 3y + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$$

Решение. Находим первые и вторые частные производные:

$$u'_x = 2x + \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad u'_y = -2y - 3 + \frac{y}{x^2+y^2},$$
$$u''_{xx} = 2 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad u''_{yy} = -2 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Видим, что функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, т. е. является гармонической. Сопряжённую к ней функцию $v(x,y)$ находим из уравнений Коши-Римана: $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$:

$$\begin{cases} v'_x = 2y + 3 - \frac{y}{x^2+y^2}, \\ v'_y = 2x + \frac{x}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Интегрируя второе уравнение по y, находим $v(x,y)$ с точностью до произвольного слагаемого, зависящего от x:

$$v(x,y) = 2xy + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C(x).$$

Дифференцируем полученное выражение по x и приравниваем к известной функции v'_x:

$$2y + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + C'(x) = 2y + 3 - \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Отсюда $C'(x) = 3$ и $C(x) = 3x + C$.
<u>Ответ</u>: $v(x,y) = 2xy + 3x + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C$. Заметим, что эта функция непрерывна только в области $x > 0$ (или в области $x < 0$). Чтобы сделать функцию непрерывной на плоскости с разрезом в виде луча, пришлось бы подбирать константу отдельно в каждой области, как было показано в задаче A1. □

Выяснить, существуют ли гармонические функции указанного вида (отличные от постоянной), и в случае существования найти их.

$\boxed{1.169}$ $u = \varphi(x)$.
Решение. Находим первые и вторые частные производные:

$$u'_x = \varphi'(x), \quad u'_y = 0, \quad u''_{xx} = \varphi''(x), \quad u''_{yy} = 0.$$

Подставляем в уравнение Лапласа ($u''_{xx} + u''_{yy} = 0$):

$$\varphi''(x) = 0.$$

Отсюда $\varphi'(x) = C_1$ и $\varphi(x) = C_1 x + C_2$.
<u>Ответ</u>: $\varphi(x) = C_1 x + C_2$. $\square$

$\boxed{1.171}$ $u = \varphi(y/x)$.
Решение. Находим первые и вторые частные производные:

$$u'_x = \varphi'(y/x) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right), \qquad u''_{xx} = \varphi''(y/x) \cdot \left(\frac{y^2}{x^4}\right) + \varphi'(y/x) \cdot \frac{2y}{x^3};$$
$$u'_y = \varphi'(y/x) \cdot \frac{1}{x}, \qquad u''_{yy} = \varphi''(y/x) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Подставляем в уравнение Лапласа:

$$\varphi''(y/x) \cdot \left(\frac{y^2}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right) + \varphi'(y/x) \cdot \frac{2y}{x^3}.$$

Умножаем уравнение на x^2 и делаем замену $t = y/x$:

$$(t^2+1)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = 0.$$

Решаем как уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции φ':

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{2t}{t^2+1}; \qquad \ln|\varphi'(t)| = -\ln(t^2+1) + C; \qquad \varphi'(t) = \frac{C_1}{t^2+1}.$$

Интегрируя ещё раз, находим $\varphi(t)$.
<u>Ответ</u>: $\varphi(t) = C_1 \operatorname{arctg} t + C_2$. $\square$

Комплексные числа

Вспоминаем, что $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Действительно, если $z = x + yi$, где $x, y \in \mathbb{R}$, то

$$|z|^2 = x^2 + y^2, \qquad z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

$\boxed{1.1}$ Выполнить указанные действия: $\quad 2)\ \dfrac{1-i}{1+i}, \qquad 4)\ (1 + i\sqrt{3})^3.$

Решение.

$$2)\ \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{|1+i|^2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i.$$
$$4)\ (1+i\sqrt{3})^3 = (2e^{i\pi/3})^3 = 8e^{i\pi} = -8.$$

Здесь была использована формула Эйлера $e^{i\pi} = -1$. $\square$

Лирическое отступление. Формулу Эйлера можно переписать в виде

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0.}$$

Эта формула связывает самые главные константы: $0, 1, e, \pi, i$.

$\boxed{1.2}$ Найти модули и аргументы комплексных чисел:

$$2)\ -2; \qquad 4)\ -1-i; \qquad 6)\ 2-5i; \qquad 8)\ -2-5i.$$

Решение. Напомним, что модуль и аргумент комплексного числа $z = x + yi$ — это такие числа $\rho \geqslant 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, что

$$z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Отсюда ρ находится однозначно ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$) и обозначается через $|z|$. При $z = 0$ аргумент z не определён, а при $z \neq 0$ находится из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{\rho}, \\ \sin\varphi = \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

и определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π. Аргумент можно также находить из условия $\operatorname{tg}\varphi = y/x$, учитывая четверть, в которой лежит точка (x, y). Через $\operatorname{Arg} z$ будем обозначать множество всевозможных аргументов комплексного числа z.

2) Пусть $z = -2$. Тогда $|z| = 2$ и $\operatorname{Arg} z = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4) Пусть $z = -1 - i$. Тогда $|z| = \sqrt{2}$. Из рисунка легко увидеть, что $\operatorname{Arg} z = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6) Пусть $z = 2 - 5i$. Тогда $|z| = \sqrt{29}$. Поскольку $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{5}{2}$ и z лежит в четвёртой четверти, то $\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

8) Пусть $z = -2 - 5i$. Тогда $|z| = \sqrt{29}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{5}{2}$ и z лежит в третьей четверти. По определению арктангенса, $\operatorname{arctg}\frac{5}{2}$ лежит в первой четверти. Чтобы получить нужный угол, прибавляем π: $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}\frac{5}{2} + \pi + 2k\pi$. □

$\boxed{\text{A3}}$ Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:

$$a + bi \ (a \neq 0), \qquad 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (|\varphi| < \pi).$$

Решение. 1. Если $a + bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. Отсюда

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), & a > 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), & a < 0. \end{cases}$$

2. Сводим к половинному углу:

$$1 + \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \\ = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Из условия на φ вытекает, что $|\varphi/2| < \pi/2$ и $\cos(\varphi/2) > 0$. Следовательно, $|z| = \cos\frac{\varphi}{2}$, $\operatorname{Arg} z = \frac{\varphi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. □

$\boxed{\text{A4}}$ Доказать, что $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \leqslant |z_1| \cdot |z_2|$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Решение. Заметим, что $\operatorname{Re}(z) \leqslant |z|$ для любого z из $\mathbb{C}$. Подставляя $z = z_1\bar{z}_2$, получаем то, что нужно. □

$\boxed{\approx 1.7,\ 1)}$ Доказать *полуаддитивность абсолютной величины* (*неравенство треугольника*):

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Решение. Докажем равносильное неравенство $|z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2$. Воспользуемся формулой $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = \\ = |z_1|^2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 + |z_2|^2.$$

Заметим, что $z_1 \cdot \bar{z}_2$ и $\bar{z}_1 \cdot z_2$ — комплексно-сопряжённые числа. Следовательно, их сумма равна $2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$. Таким образом,

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2 \leqslant \\ \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

$\square$

$\boxed{\approx 1.9}$ Доказать *тождество параллелограмма* и выяснить его геометрический смысл:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Решение. Пользуясь формулами $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ и $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$, преобразуем левую часть:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2 + |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2 = \\ = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Выясним геометрический смысл. Если z_1 и z_2 — векторы сторон параллелограмма, то $z_1 + z_2$ и $z_1 - z_2$ — векторы диагоналей. Таким образом, тождество параллелограмма имеет следующий геометрический смысл: *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его сторон.* $\square$

$\boxed{1.4}$ Найти все значения следующих корней и построить их:

$$1)\ \sqrt[3]{1}; \qquad 3)\ \sqrt[4]{-1}; \qquad 5)\ \sqrt[8]{1}; \qquad 7)\ \sqrt{3+4i}.$$

Решение. В примерах 1), 3), 5) удобно искать корень в тригонометрической форме: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Для возведения в степень используем формулу Муавра: $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

1. $z^3 = 1$. Это значит, что $\rho^3 = 1$, $3\varphi = 0 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Отсюда $\rho = 1$, $\varphi = \frac{2k\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Различные значения корня получаются при $k = 0, 1, 2$. Можно перейти и к алгебраической форме:

$$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$
$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

3. $z^4 = -1$. Это значит, что $\rho^4 = 1$, $4\varphi = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Различные значения корня получаются при $k = 0, 1, 2, 3$.

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

5. $z^8 = 1$.

$$z_k = \cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4} \qquad (k = 0, \ldots, 7).$$

7. $z^2 = 3 + 4i$. В этом примере углы «плохие», и лучше искать z в алгебраической форме: $z = x + yi$. Приравнивая действительные и мнимые части чисел $(x + yi)^2$ и $3 + 4i$, получаем систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

Рекомендуется следующий способ решения этой системы. Возводя каждое из уравнений в квадрат и складывая, получаем уравнение

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 25, \qquad \text{т. е.} \qquad x^2 + y^2 = 5.$$

Используя уравнение $x^2 - y^2 = 3$, получим:

$$x^2 = 4, \qquad y^2 = 1.$$

Но при возведении в квадрат была нарушена равносильность. При выборе знаков x и y нужно учитывать условие $2xy = 4$. Получаем два корня:

$$z_0 = 2 + i, \qquad z_1 = -2 - i.$$

$\square$