Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
7-е занятие. Комплексная плоскость

$\boxed{1.13,\ 1)}$ Доказать тождество:

$$(n-2)\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 + \left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|^2 = \sum_{1\leqslant k<s\leqslant n}|a_k+a_s|^2.$$

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть z — середина отрезка с концами z_1 и z_2. Выразить z через z_1 и z_2, используя операции над комплексными числами.

$\boxed{\text{A2}}$ Пусть $z_1 = 1$, $z_2 = 3$, $z_3 = 2+i$. Найти $\omega_3 z_1$, $\omega_3 z_2$ и $\omega_3 z_3$, где $\omega_3 = e^{2\pi i/3}$.

$\boxed{1.15}$ Найти вершины правильного n-угольника, если его центр находится в точке $z=0$, а одна из вершин z_0 известна.

$\boxed{\text{A3}}$ Выяснить геометрический смысл следующих соотношений, нарисовать эскизы:

$\boxed{\text{A4}}$ $\operatorname{Re}(z)=4.$ $\boxed{\text{A5}}$ $\operatorname{Im}(z)=-3.$ $\boxed{\text{A6}}$ $\operatorname{Re}(z)\leqslant -3.$

$\boxed{\text{A7}}$ $\operatorname{Re}(iz)=2.$ $\boxed{\text{A8}}$ $\operatorname{Im}(iz)=-1.$ $\boxed{\text{A9}}$ $2\leqslant \operatorname{Re}(iz)<3.$

$\boxed{\text{A10}}$ $|z-i|=2.$ $\boxed{\text{A11}}$ $|z+2-i|\geqslant 4.$

$\boxed{\text{A12}}$ $\arg z = -\frac{3\pi}{4}.$ $\boxed{\text{A13}}$ $\arg(z+2-i)=\frac{\pi}{6}.$

$\boxed{\text{A14}}$ $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}.$ $\boxed{\text{A15}}$ $\frac{\pi}{4}<\arg(z-1+2i)<\frac{3\pi}{4}.$

$\boxed{\text{A16}}$ $\operatorname{Re} z + 2\operatorname{Im} z > 4.$

$\boxed{1.32,\ 1)}$ $\operatorname{Im}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0.$ $\boxed{\text{A17}}$ $\operatorname{Re}\dfrac{z-2i}{z+2i}=0.$

$\boxed{1.35,\ 1)}$ $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=C$ $(C\in\mathbb{R})$. Рисунки для $C=-2$, $C=\frac{1}{2}$, $C=0$.

$\boxed{1.40,\ 1)}$ Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до точек заданной линии $(a>0)$: $\left|z+\frac{1}{z}\right|=a$.

$\boxed{\text{A18}}$ Пусть γ — кривая, заданная уравнением $z(t)=t\cdot e^{it}$, где $t>0$. Построить на этой кривой какую-нибудь непрерывную ветвь $f(z)$ многозначной функции $\operatorname{Arg} z$.

$\boxed{\text{A19}}$ Пусть $f(z)$ — непрерывная ветвь многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, определённая на ломаной с вершинами $z_1=-i$, $z_2=-1$, $z_3=i$, $z_4=-1-i$. Найти $f(z_4)$, если $f(z_1)=-\dfrac{\pi}{2}$.

Домашнее задание № 7
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{1.13,\ 2)}$ Доказать тождество:

$$n\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2-\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|^2=\sum_{1\leqslant k<s\leqslant n}|a_k-a_s|^2.$$

$\boxed{1.17}$ Даны три вершины параллелограмма z_1, z_2, z_3. Найти четвёртую вершину z_4, противоположную вершине z_2.

Выяснить геометрический смысл следующих соотношений. Нарисовать эскизы:

$\boxed{1.27}$ 1) $\operatorname{Re} z \geqslant C$; 2) $\operatorname{Im} z < C$. $\boxed{1.28}$ $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$.

$\boxed{1.23,\ \text{конкрет.}}$ $|z-2+3i| < 2$; $|z+1-2i| > 3$; $|z-4| = 1$.

$\boxed{1.24}$ $|z-2|+|z+2| = 5$. $\boxed{1.25}$ $|z-2|-|z+2| > 3$.

$\boxed{1.26}$ $|z-z_1| = |z-z_2|$. (Например, можно взять $z_1 = 2-i$, $z_2 = i$.)

$\boxed{\text{A}1}$ $\arg z = -\frac{\pi}{2}$. $\boxed{\text{A}2}$ $\arg(z-2-3i) = \frac{5\pi}{6}$.

$\boxed{1.29,\ \text{конкрет.}}$ $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{6}$. $-\frac{\pi}{3} < \arg(z+2i) < \frac{2\pi}{3}$.

$\boxed{1.30}$ $|z| = \operatorname{Re} z + 1$. $\boxed{1.31}$ $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$.

$\boxed{1.32.\ 2)}$ $\operatorname{Re}\dfrac{z-z_1}{z-z_2} = 0$. Первый способ решения: сообразить, как связаны векторы $z-z_1$ и $z-z_2$. Второй способ решения: записать это соотношение через константы $z_3 = \frac{z_1+z_2}{2}$, $z_4 = \frac{z_2-z_1}{2}$ и переменную $w = z - z_3$.

$\boxed{1.35,\ 2)}$ $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = C \quad (C \in \mathbb{R})$. Рисунки для $C = 4$, $C = -\frac{1}{4}$, $C = 0$.

$\boxed{1.36}$ 1) $\operatorname{Re} z^2 = C$; 2) $\operatorname{Im} z^2 = C \quad (C \in \mathbb{R})$. Рисунок для $C = 4$.

$\boxed{1.40,\ 2),\ \text{конкрет.}}$ Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до точек заданной линии ($a > 0$): $\left|z+\frac{4}{z}\right| = 6$.

$\boxed{\text{A}3}$ Пусть γ — кривая, заданная следующим путём: $z(t) = 2 - e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Определить на γ непрерывную ветвь $f(z)$ многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, так чтобы выполнялось условие $f(1) = 0$.

$\boxed{\text{A}4}$ Пусть $f(z)$ — непрерывная ветвь многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, определённая на ломаной с вершинами $z_1 = 1-i$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$, $z_4 = 1+i$. Найти $f(z_4)$, если $f(z_1) = \dfrac{7\pi}{4}$.