# Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
# 8-е занятие. Комплексная плоскость. Экспонента

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, $\beta \geqslant 0$. Выяснить геометрический смысл соотношения $\mathrm{Re}(\bar{\alpha} z) = \beta$.

$\boxed{\text{A2}}$ Представить уравнения следующих прямых в виде $\mathrm{Re}(\bar{\alpha} z) = \beta$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, $\beta \geqslant 0$:

$$1)\ x + y - 3 = 0, \qquad 2)\ 5x - 12y + 3 = 0.$$

$\boxed{1.35,\ 1)}$ $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z} = C \quad (C \in \mathbb{R})$. Рисунки для $C = -2$, $C = \frac{1}{2}$, $C = 0$.

$\boxed{1.40,\ 1)}$ Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до точек заданной линии ($a > 0$): $\left|z + \frac{1}{z}\right| = a$.

$\boxed{1.41}$ Функция $\arg z$ определена однозначно во всякой точке $z \neq 0$, если положить $|z| - 2\pi < \arg z \leqslant |z|$. Каково геометрическое место точек, в которых нарушается непрерывность определённой таким образом функции $\arg z$?

$\boxed{\text{A3}}$ Пусть $f(z)$ — непрерывная ветвь многозначной функции $\mathrm{Arg}\, z$, определённая в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$. Найти $f(0)$, если $f(-i) = -\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{A4}}$ Пусть $f(z)$ — непрерывная ветвь многозначной функции $\mathrm{Arg}\, z$, определённая в плоскости $\mathbb{C}$ со следующим разрезом:

$$z = \begin{cases} te^{it}, & t \in [0, 5\pi/2]; \\ it, & t \in [5\pi/2, +\infty). \end{cases}$$

Найти $f(10 + 10i)$ и $f(i)$, если $f(1) = 2\pi$.

$\boxed{\approx 1.58}$ Из формулы $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ вывести, что

1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$;
2) $e^{z + 2\pi i} = e^z$;
3) если $e^{z+\omega} = e^z$ при всяком $z$, то $\omega = 2\pi k i$, где $k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{1.60}$ Найти $e^{\pm \pi i/2}$, $e^{k\pi i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$\boxed{1.61}$ Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел $e^{2+i}$, $e^{2-3i}$, $e^{3+4i}$, $e^{-3-4i}$, $-ae^{i\varphi}$ ($a > 0$, $|\varphi| \leqslant \pi$); $e^{-i\varphi}$ ($|\varphi| \leqslant \pi$); $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ ($0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 2\pi$).

$\boxed{1.62\text{: } 3),\ 4)}$ Найти суммы:

$$\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x, \quad \sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x.$$

# Домашнее задание № 8
# Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Представить уравнения следующих прямых в виде $\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z) = \beta$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, $\beta \geqslant 0$:

$$1)\ x - y - 2 = 0; \qquad 2)\ 3x - 4y - 2 = 0; \qquad 3)\ x + \sqrt{3}y + 6 = 0.$$

$\boxed{\approx 1.18}$ Пусть $z_1, z_2, z_3$ — три попарно различные точки. Доказать, что условие $\operatorname{Re}\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 0$ равносильно тому, что точки $z_1, z_2, z_3$ лежат на одной прямой.

$\boxed{1.35,\ 2)}$ $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = C \quad (C \in \mathbb{R})$. Рисунки для $C = 4$, $C = -\frac{1}{4}$, $C = 0$.

$\boxed{1.40,\ 2),\ \text{конкрет.}}$ Найти наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до точек заданной линии ($a > 0$): $\left|z + \frac{4}{z}\right| = a$.

$\boxed{1.42}$ Каково геометрическое место точек, в которых нарушается непрерывность функции $\arg z$, однозначно определённой при любом $z \neq 0$ неравенствами $\ln|z| - 2\pi < \arg z \leqslant \ln|z|$?

$\boxed{1.59}$ Представить в показательной форме числа $1$, $-1$, $i$, $-i$, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$.

$\boxed{1.62,\ 1),\ 2),\ 5)}$ Найти суммы:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx, \qquad \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx,$$

$$\sin x - \sin 2x + \ldots + (-1)^{n-1}\sin nx.$$

$\boxed{1.63}$ Найти суммы:
1) $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta)$;
2) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \ldots + \sin(\alpha + n\beta)$.

$\boxed{1.64}$ Исходя из определения соответствующих функций и свойств экспоненты, доказать:
1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; 2) $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$;
3) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;
4) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;
5) $\operatorname{tg} 2z = \dfrac{2\operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$; 6) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$.

$\boxed{1.65}$ Доказать, что если $\cos(z + \omega) = \cos z$ при всяком $z$, то $\omega = 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$\boxed{1.66,\ 1),\ 2)}$ Доказать, что $\sin iz = i\operatorname{sh} z$, $\cos iz = \operatorname{ch} z$.