Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
9-е занятие. Тригонометрические функции. Логарифм. Степень

$\boxed{\approx 1.66,\ 1)}$ Выразить sin через sh. Выразить sh через sin.

$\boxed{1.67}$ Выразить через тригонометрические и гиперболические функции действительного аргумента действительные и мнимые части, а также модули следующих функций:

$$0)\ e^{iz} \qquad 1)\ \sin z; \qquad 2)\ \cos z; \qquad 3)\ \operatorname{tg} z.$$

$\boxed{1.61}$ Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел e^{2+i}, e^{2-3i}, e^{3+4i}, e^{-3-4i}, $-ae^{i\varphi}$ $(a > 0,\ |\varphi| \leqslant \pi)$; $e^{-i\varphi}$ $(|\varphi| \leqslant \pi)$; $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ $(0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 2\pi)$.

В следующей задаче дана кривая γ с помощью некоторой параметризации. Требуется определить на γ непрерывную ветвь $\arg(z)$ многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, принимающую заданное значение в указанной точке кривой:

$\boxed{\text{A1}}$ $z(t) = 1 - e^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Найти $\arg(z(t))$, если $\arg(0) = \frac{3\pi}{2}$.

$\boxed{\text{A2}}$ Вычислить $\operatorname{Ln}(-4)$, $\operatorname{Ln}(-i)$, $\operatorname{Ln}(-3+7i)$.

$\boxed{\text{A3}}$ Пусть $z(t)$, где $t \in [0, 2\pi]$ — каноническая параметризация некоторой окружности (например, $z(t) = 2e^{it}$), z_0 — точка, лежащая внутри этой окружности (например, $z_0 = i$), $f(t)$ — непрерывная ветвь функции $\operatorname{Arg}(z(t) - z_0)$, заданная на $[0, 2\pi]$, т. е. функция $f(t)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$ и $f(t) \in \operatorname{Arg}(z(t) - z_0)$ для каждого $t \in [0, 2\pi]$. Найти $f(2\pi) - f(0)$.

$\boxed{\approx 1.73}$ Первоначальное значение $\operatorname{Im} f(z)$ при $z = 2$ принято равным нулю. Точка z делает один полный оборот против часовой стрелки по окружности с центром в точке $z = 0$ и возвращается в точку $z = 2$. Считая, что $f(z)$ изменяется непрерывно при движении точки z, указать значение $\operatorname{Im} f(z)$ после указанного оборота, если:

$$\text{a)}\ f(z) = 3 \operatorname{Ln} z; \qquad \text{b)}\ f(z) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln}(z-1).$$

$\boxed{1.74,\ 3),\ 5),\ 8)}$ Найти все значения следующих степеней:

$$3)\ 2^i, \qquad 5)\ i^i, \qquad 8)\ (-3+4i)^{1+i}.$$

Домашнее задание № 9
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

В следующих задачах дана кривая γ с помощью некоторой параметризации. Требуется определить на γ непрерывную ветвь $\arg(z)$ многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, принимающую заданное значение в указанной точке кривой:

$\boxed{\text{A1}}$ $z(t) = -i + ie^{it},\ 0 < t < 2\pi$. Найти $\arg(z(t))$, если $\arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{A2}}$ $z(t) = -1 - e^{it},\ -\pi < t < \pi$. Найти $\arg(z(t))$, если $\arg(-1-i) = \frac{5\pi}{4}$.

$\boxed{1.67}$ Выразить через тригонометрические и гиперболические функции действительного аргумента действительные и мнимые части, а также модули следующих функций: 4) $\operatorname{sh} z$; 5) $\operatorname{ch} z$; 6) $\operatorname{th} z$.

$\boxed{1.69}$ Для каждой из функций e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{cth} z$ найти множество точек z, где она принимает: 1) действительные значения; 2) чисто мнимые значения.

$\boxed{1.71}$ Вычислить: $\operatorname{Ln} 4,\ \operatorname{Ln}(-1),\ \ln(-1);\quad \operatorname{Ln} i,\ \ln i;$
$\operatorname{Ln} \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ \operatorname{Ln} \frac{1-i}{\sqrt{2}};\ \operatorname{Ln}(2-3i),\ \operatorname{Ln}(-2+3i)$.

$\boxed{1.73}$ (См. задание в классной работе.)
1) $f(z) = 2\operatorname{Ln} z$; 2) $f(z) = \operatorname{Ln}\dfrac{1}{z}$;
3) $f(z) = \operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln}(z+1)$; 4) $f(z) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln}(z+1)$.

$\boxed{\text{A3}}$ Пусть $z(t)$, где $t \in [0, 2\pi]$ — каноническая параметризация некоторой окружности (например, $z(t) = e^{it}$), z_0 — точка, лежащая вне этой окружности (например, $z_0 = -2$), $f(t)$ — непрерывная ветвь функции $\operatorname{Arg}(z(t) - z_0)$, заданная на $[0, 2\pi]$, т. е. функция $f(t)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$ и $f(t) \in \operatorname{Arg}(z(t) - z_0)$ для каждого $t \in [0, 2\pi]$. Найти $f(2\pi) - f(0)$.

$\boxed{1.74}$ Найти все значения следующих степеней:

$$1)\ 1^{\sqrt{2}},\quad 2)\ (-2)^{\sqrt{2}},\quad 4)\ 1^{-i},\quad 6)\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i},\quad 7)\ (3-4i)^{1+i}.$$

$\boxed{1.77,\ 6)}$ Доказать следующее равенство (для корней берутся все их значения):

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}).$$

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
9-е занятие. Конспект.
Тригонометрические функции.
Логарифм. Степень

$\boxed{\approx 1.66,\ 1)}$ Выразить sin через sh. Выразить sh через sin.
Решение. Вспоминаем определения sin и sh через exp:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Отсюда $\sin z = \dfrac{\operatorname{sh} iz}{i}$. Подставляя iz вместо z и пользуясь нечётностью sh, получаем: $\sin iz = -\frac{\operatorname{sh} z}{i}$. Отсюда $\operatorname{sh} z = -i \sin iz = \dfrac{\sin iz}{i}$.
Ответ: $\sin z = \dfrac{\operatorname{sh} iz}{i}$, $\operatorname{sh} z = \dfrac{\sin iz}{i}$. □

$\boxed{1.67}$ Выразить через тригонометрические и гиперболические функции действительного аргумента действительные и мнимые части, а также модули следующих функций:

$$0)\ e^{iz} \qquad 1)\ \sin z; \qquad 2)\ \cos z; \qquad 3)\ \operatorname{tg} z.$$

Решение. Пусть $z = x + yi$. Тогда

$$e^{iz} = e^{-y+xi} = e^{-y} \cdot e^{ix} = e^{-y}(\cos x + i \sin x).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} &= \\
&= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2i} = \\
&= \frac{(e^{-y} + e^{y}) \sin x}{2} + \frac{(e^{-y} - e^{y}) \cos x}{2i} = \\
&= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.
\end{aligned}$$

Более простой способ — воспользоваться формулой для $\sin(z_1 + z_2)$ и формулами $\sin iy = i \operatorname{sh} y$, $\cos iy = \operatorname{ch} y$:

$$\sin z = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Отсюда

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y =$$
$$= \sin^2 x(\operatorname{sh}^2 y + 1) + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y,$$

т. е.

$$|\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}.$$

Аналогично доказывается формула для $\cos z$:

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \qquad |\cos z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x}.$$

Из формул для $\sin z$ и $\cos z$ выводим формулу для $\operatorname{tg} z$:

$$\begin{aligned}\operatorname{th} z = \frac{\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y}{\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y} &= \\ = \frac{(\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y)(\cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y)}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} &= \\ = \frac{4(\sin x \cos x + i \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y)}{(1 + \cos 2x)(1 + \operatorname{ch} 2y) + (1 - \cos 2x)(\operatorname{ch} 2y - 1)} &= \\ = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}.\end{aligned}$$

Отсюда нетрудно найти $|\operatorname{tg} z|$:

$$|\operatorname{tg} z| = \frac{\sqrt{\sin^2 2x + \operatorname{sh}^2 2y}}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}.$$

□

$\boxed{1.61}$ Найти модули и главные значения аргументов указанных комплексных чисел: (...).

Решение.

(1) $z = e^{2+i} = e^2(\cos 1 + i \sin 1)$. Отсюда $|z| = e^2$, $\arg z = 1$.

(2) $z = e^{2-3i} = e^2(\cos 3 - i \sin 3)$. Отсюда $|z| = e^2$, $\arg z = -3$.

(3) $z = e^{3+4i} = e^2(\cos 4 + i \sin 4) = e^2(\cos(4 - 2\pi) + i \sin(4 - 2\pi))$. Отсюда $|z| = e^2$, $\arg z = 4 - 2\pi$.

(4) $z = e^{-3-4i} = e^{-3}(\cos(-4) + i \sin(-4))$. Отсюда $|z| = e^{-3}$, $\arg z = 2\pi - 4$.

(5) $z = -ae^{i\varphi}$, где $a > 0$, $|\varphi| \leqslant \pi$. Заметим, что $z = ae^{i(\pi+\varphi)}$. Отсюда $|z| = a$, $\arg z = \pi + \varphi$ при $-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0$, $\arg z = \varphi - \pi$ при $0 \leqslant \varphi < \pi$, $\arg z = \pi$ при $\varphi = 0$.

(6) $z = e^{-i\varphi}$, где $|\varphi| \leqslant \pi$. Здесь $|z| = 1$, $\arg z = -\varphi$ при $-\pi \leqslant \varphi < \pi$, $\arg z = \pi$ при $\varphi = \pi$.

(7) $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$, где $0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 2\pi$. Здесь

$$\begin{aligned} z &= \cos\alpha - \cos\beta + i(\sin\alpha - \sin\beta) = \\ &= -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + 2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \\ &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(-\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + i\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \\ &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\pi+\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда $|z| = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\arg z = \dfrac{\pi+\alpha+\beta}{2} + 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$ выбирается в зависимости от значения $\alpha+\beta$ так, чтобы $-\pi < \arg z \leqslant \pi$.

□

В следующей задаче дана кривая γ с помощью некоторой параметризации. Требуется определить на γ непрерывную ветвь $\arg(z)$ многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, принимающую заданное значение в указанной точке кривой:

$\boxed{\text{А4}}$ $z(t) = 1 - e^{it}$, $0 < t < 2\pi$. Найти $\arg(z(t))$, если $f(2) = 0$.

Решение. Переведём $z(t)$ в тригонометрическую форму:

$$\begin{aligned} z(t) = 1 - \cos t - i\sin t &= 2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2} - i\cos\frac{t}{2}\right) = \\ &= 2\sin\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t-\pi}{2} + i\sin\frac{t-\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда $\arg z(t) = \frac{t-\pi}{2} + 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Чтобы функция получилась непрерывной, число k должно быть одним и тем же для всех $t \in (0, 2\pi)$. Точка $z = 2$ получается при $t = \pi$. Подставляя эти значения, находим k: $\frac{\pi-\pi}{2} + 2k\pi = 0$, $k = 0$.

Рекомендуется на рисунке изобразить кривую $z(t)$ и подписать значения $z(+0)$, $z(\pi/2)$, $z(\pi)$, $z(3\pi/2)$, $z(2\pi-0)$.

<u>Ответ</u>: $\arg z(t) = \dfrac{t-\pi}{2}$.

□

$\boxed{\text{А5}}$ Вычислить $\operatorname{Ln}(-4)$, $\operatorname{Ln}(-i)$, $\operatorname{Ln}(-3+7i)$.

Решение. Из определения Ln следует, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

где $\arg z$ — какое-нибудь значение аргумента z. Если $\arg z$ выбрано из промежутка $(-\pi, \pi]$, то $\ln r + i\varphi$ называют *главным значением* величины $\operatorname{Ln} z$.

$z = -4$. Видим, что $|z| = 4$, $\arg z = \pi$. Отсюда $\operatorname{Ln}(-4) = \ln 4 + i\pi + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$z = -i$. Здесь $|z| = 1$, $\arg z = -\frac{\pi}{2}$. Отсюда $\operatorname{Ln}(-i) = -\frac{\pi}{2} \cdot i + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$z = -3+7i$. Здесь $|z| = \sqrt{58}$, $\arg z = \pi - \operatorname{arctg} \frac{7}{3}$. Отсюда $\operatorname{Ln}(-3+7i) = \frac{1}{2}\ln 58 + \pi i - i \operatorname{arctg} \frac{7}{3} + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. □

$\boxed{\text{A6}}$ Пусть $z(t)$, где $t \in [0, 2\pi]$ — каноническая параметризация некоторой окружности (например, $z(t) = 2e^{it}$), z_0 — точка, лежащая внутри этой окружности (например, $z_0 = i$), $f(t)$ — непрерывная ветвь функции $\operatorname{Arg}(z(t) - z_0)$, заданная на $[0, 2\pi]$, т. е. функция $f(t)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$ и $f(t) \in \operatorname{Arg}(z(t) - z_0)$ для каждого $t \in [0, 2\pi]$. Найти $f(2\pi) - f(0)$.
Решение. $f(t)$ — это угол, под которым проходит луч из z_0 в $z(t)$. Геометрически очевидно, что после одного обхода окружности этот угол увеличивается на 2π. Таким образом, $f(2\pi) - f(0) = 2\pi$. □

$\boxed{\approx 1.73}$ Первоначальное значение $\operatorname{Im} f(z)$ при $z = 2$ принято равным нулю. Точка z делает один полный оборот против часовой стрелки по окружности с центром в точке $z = 0$ и возвращается в точку $z = 2$. Считая, что $f(z)$ изменяется непрерывно при движении точки z, указать значение $\operatorname{Im} f(z)$ после указанного оборота, если:

a) $f(z) = 3 \operatorname{Ln} z$; b) $f(z) = \operatorname{Ln}(z - i)$; c) $f(z) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln}(z - 1)$.

Решение. Заметим, что непрерывную ветвь $\operatorname{Ln} z$ можно представить в виде $\ln|z| + i \arg z$, где $\arg z$ — непрерывная ветвь аргумента. При этом $\ln|z|$ не меняется после указанного оборота, а $\arg z$ меняется на 2π. На такое же значение изменяются $\arg(z - i)$ и $\arg(z - 1)$.
<u>Ответ</u>: a) 6π; b) 2π; c) 4π. □

$\boxed{1.74,\ 3),\ 5),\ 8)}$ Найти все значения следующих степеней:

$$3)\ 2^i, \qquad 5)\ i^i, \qquad 8)\ (-3 + 4i)^{1+i}.$$

Решение. 3) 2^i. Находим $\operatorname{Ln} 2$: $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi \cdot i$. Отсюда

$$2^i = \exp(-2k\pi + i \ln 2) = \exp(-2k\pi)(\cos \ln 2 + i \sin \ln 2).$$

5) i^i. Находим $\operatorname{Ln} i$: $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi}{2} \cdot i + 2k\pi \cdot i$. Отсюда

$$i^i = \exp(-\pi/2 - 2k\pi).$$

8) $(-3+4i)^{1+i}$. Сначала находим модуль и аргумент числа $-3+4i$:

$$|-3+4i| = 5, \qquad \operatorname{Arg}(-3+4i) = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2k\pi.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(-3+4i)^{1+i} &= \exp((\ln 5 - i\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + (2k+1)\pi\cdot i)(1+i)) = \\ &= \exp(\ln 5 + \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + (2k+1)\pi)\cdot \\ &\qquad \cdot\exp(i(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + (2k+1)\pi)) = \\ &= -5e^{\operatorname{arctg}(4/3)+(2k+1)\pi}e^{(\ln 5 - \operatorname{arctg}(4/3))i}.\end{aligned}$$

$\square$