

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
10-е занятие. Аркфункции.

(повторение) Изобразить линии, заданные уравнениями:

a) $|z - 2| + |z + 1| = 5$. b) $|z - i| - |z + 3i| < 5$.

A1 Вычислить: 1) $\sin(3 - i)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$.

1.74, 3), 5), 8) Найти все значения следующих степеней:

3) 2^i , 5) i^i , 8) $(-3 + 4i)^{1+i}$.

A2 Провести в комплексной плоскости разрез так, чтобы в плоскости с этим разрезом из многозначной функции $\operatorname{Arg} z$ можно было выделить однозначную непрерывную ветвь $f(z)$, принимающую в двух указанных точках заданные значения. Разрез должен исходить из нуля и заканчиваться прямой.

1) $f(-1) = -\pi$, $f(3i) = \frac{5\pi}{2}$; 2) $f(i) = \frac{\pi}{2}$, $f(4) = -4\pi$.

A3 Найти приращение непрерывной ветви функции $\operatorname{Arg}(z(t))$, когда t пробегает сегмент $[0, 2\pi]$, если:

1) $z(t) = 3e^{it}$, 2) $z(t) = i + 2e^{it}$, 3) $z(t) = -1 + 2e^{-it}$, 4) $z(t) = 2 + e^{it}$.

A4 Пусть $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w^2 = z$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Найти $\operatorname{Arg} z$. Рассмотреть примеры: $z = 4$, $z = 3i$, $z = -1 + \sqrt{3}i$, $z = -4$.

1.43, 1), 5) Первоначальное значение $\arg f(z)$ при $z = 2$ принято равным 0. Точка z делает один полный оборот против часовой стрелки по окружности с центром в начале координат и возвращается в точку $z = 2$. Считая, что $\arg f(z)$ изменяется непрерывно при движении точки z , указать значение $\arg f(2)$ после указанного оборота, если:

1) $f(z) = \sqrt{z - 1}$. 5) $f(z) = \sqrt{\frac{z - 1}{z + 1}}$.

1.77, 6), 3) Доказать следующие равенства (для корней берутся все их значения):

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i + z}{i - z} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

A5 Найти все значения: $\operatorname{Arsh} 2i$; $\operatorname{Arctg}(1 - 2i)$.

Домашнее задание № 10

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

1.68] Найти действительные и мнимые части следующих значений функций:

$$\begin{array}{lll} 1) \cos(2 + i); & 2) \sin 2i; & 3) \operatorname{tg}(2 - i); \\ 4) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right); & 5) \operatorname{cth}(2 + i); & 6) \operatorname{th}\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right). \end{array}$$

1.74] Найти все значения следующих степеней:

$$1) 1^{\sqrt{2}}, \quad 2) (-2)^{\sqrt{2}}, \quad 4) 1^{-i}, \quad 6) \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}, \quad 7) (3-4i)^{1+i}.$$

1.77] Доказать следующие равенства (для корней берутся все их значения):

$$\begin{array}{ll} 1) \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}); & 5) \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}); \\ 2) \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i(z + \sqrt{z^2 - 1}); & 7) \operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}. \end{array}$$

1.81] Найти все значения следующих функций:

$$1) \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}; \quad 2) \operatorname{Arccos} \frac{1}{2}; \quad 3) \operatorname{Arccos} 2; \quad 4) \operatorname{Arcsin} i; \quad 7) \operatorname{Arth}(1 - i).$$

A1] Провести в комплексной плоскости разрез так, чтобы в плоскости с этим разрезом из многозначной функции $\operatorname{Arg} z$ можно было выделить однозначную непрерывную ветвь $f(z)$, принимающую в двух указанных точках заданные значения. Разрез должен исходить из нуля и заканчиваться прямой.

$$1) f(-i) = \frac{3\pi}{2}, \quad f(-4) = -3\pi; \quad 2) f(1) = 0, \quad f(3i) = \frac{5\pi}{2}.$$

A2] Найти приращение непрерывной ветви функции $\operatorname{Arg}(z(t))$, когда t пробегает сегмент $[0, 2\pi]$, если:

$$1) z(t) = 1 + i + 3e^{-it}; \quad 2) z(t) = 2 + i + e^{it}; \quad 3) z(t) = -3i + e^{-it}.$$

1.43, 2)–4) См. задание в классной работе.

$$2) f(z) = \sqrt[3]{z-1}; \quad 3) f(z) = \sqrt{z^2-1}; \quad 4) f(z) = \sqrt{z^2+2z-3}.$$