Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
11-е занятие. Аркфункции.
Линии, заданные параметрическими уравнениями

$\boxed{\text{A1}}$ Доказать, что если $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $n \in \mathbb{N}$, то величина $\exp(n \operatorname{Ln} a)$ имеет одно значение, равное $\prod\limits_{k=1}^{n} a$. (Вывод: для натурального показателя определение степени через логарифм и экспоненту совпадает с обычным определением.)

$\boxed{\approx 1.76}$ Совпадают ли множества значений a^{2b}, $(a^b)^2$, $(a^2)^b$? Рассмотреть пример $a = -1$, $b = 1/2$.

$\boxed{1.77,\ 6),\ 3)}$ Доказать следующие равенства (для корней берутся все их значения):

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}), \qquad \operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i+z}{i-z} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}.$$

$\boxed{\text{A2}}$ Вычислить: $\operatorname{Arsh}(i\sqrt{2})$, $\operatorname{Arctg} \sqrt{3}$, $\operatorname{Arctg}(1+2i)$.

$\boxed{1.82,\ 1)}$ Решить уравнение: $\sin z + \cos z = 2$.

Определить линии, указанные следующими уравнениями:

$\boxed{109}$ $z = 1 - it$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

$\boxed{111}$ $z = t^2 + it^4$, $t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{113}$ $z = t + \dfrac{i}{t}$, $\quad -\infty < t < 0$.

$\boxed{1.114,\ 1)}$ $z = t + i\sqrt{1-t^2}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

$\boxed{1.115}$ 1) $z = a(t + i - ie^{-it})$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

$\boxed{116}$ Для отображения $w = z^2$ требуется:
1) найти образы линий $x = C$, $y = C$, $x = y$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ и выяснить, какие из них преобразуются взаимно однозначно;
2) найти прообразы (на z-плоскости) линий $u = C$, $v = C$ $(w = u + iv)$.

Домашнее задание № 11
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{1.75}$ Показать, что в случае рационального показателя степени ($\alpha = m/n$, где m и n взаимно простые) общее определение степени z^α совпадает с обычным определением: $z^{m/n} = (\sqrt[n]{z})^m$. В частности, $z^{m/n}$ имеет ровно n значений.

$\boxed{1.77}$ Доказать следующие равенства (для корней берутся все их значения):

1) $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$;
5) $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$;
2) $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i(z + \sqrt{z^2 - 1})$;
7) $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1+z}{1-z}$.

$\boxed{1.78}$ Доказать, что для любого значения $\operatorname{Arccos} z$ можно подобрать такое значение $\operatorname{Arcsin} z$, чтобы сумма этих значений была равна $\pi/2$. Доказать аналогичное утверждение для $\operatorname{Arctg} z$ и $\operatorname{Arcctg} z$.

$\boxed{1.81}$ Найти все значения следующих функций:

1) $\operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{2}$; 2) $\operatorname{Arccos} \dfrac{1}{2}$; 3) $\operatorname{Arccos} 2$; 4) $\operatorname{Arcsin} i$; 7) $\operatorname{Arth}(1 - i)$.

$\boxed{1.82}$ Решить уравнения:

2) $\sin z - \cos z = 3$; 3) $\sin z - \cos z = i$; 4) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$.

Определить линии, заданные указанными уравнениями:

$\boxed{1.110}$ $z = t + it^2$, $-\infty < t < \infty$.

$\boxed{1.112}$ $z = a(\cos t + i \sin t)$, $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $a > 0$.

$\boxed{1.114,\ 2)}$ $z = -t + i\sqrt{1 - t^2}$, $-1 \leqslant t < 0$ (берётся арифметическое значение корня).

$\boxed{1.115,\ 2)}$ $z = ia + at - ibe^{-it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$.

$\boxed{1.117}$ Для отображения $w = 1/z$ найти:
1) образы линий $x = C$, $y = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$, $|z - 1| = 1$;
2) прообразы линий $u = C$, $v = C$, где $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$.

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
11-е занятие. Конспект. Аркфункции.
Линии, заданные параметрическими уравнениями

$\boxed{\text{A1}}$ Доказать, что если $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $n \in \mathbb{N}$, то величина $\exp(n \operatorname{Ln} a)$ имеет одно значение, равное $\prod\limits_{k=1}^{n} a$. (Вывод: для натурального показателя определение степени через логарифм и экспоненту совпадает с обычным определением.)

Решение. Пусть $\arg a$ — одно из значений аргумента a. Тогда

$$\operatorname{Ln} a = \ln|a| + i \cdot \arg a + i \cdot 2\pi k, \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь воспользуемся основным свойством экспоненты:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

и получим:

$$\exp(n \operatorname{Ln} a) = \exp(n \ln|a|) \cdot \exp(i \cdot n \arg a) \cdot \exp(i \cdot 2\pi k \cdot n).$$

Поскольку $kn \in \mathbb{Z}$, то $\exp(i \cdot 2\pi kn) = 1$. Следовательно, $\exp(n \operatorname{Ln} a)$ имеет только одно значение:

$$\exp(n \operatorname{Ln} a) = |a|^n \cdot \exp(i \cdot n \arg a).$$

С другой стороны, $a = |a| \cdot \exp(i \cdot n \arg a)$. По основному свойству экспоненты, $\prod_{k=1}^{n} a = |a|^n \cdot \exp(i \cdot n \arg a)$. $\square$

$\boxed{\approx 1.76}$ Совпадают ли множества значений a^{2b}, $(a^b)^2$, $(a^2)^b$? Рассмотреть пример $a = -1$, $b = 1/2$.

Решение. Пусть $a = -1$, $b = 1/2$. Тогда $a^{2b} = (-1)^1 = -1$. Как следует из задачи 1.75, величина $(-1)^{1/2}$ имеет два значения: i и $-i$. Но при возведении в квадрат получается только одно значение: $(a^b)^2 = -1$. Можно доказать, что всегда $a^{2b} = (a^b)^2$.

Наконец, рассмотрим $(a^2)^b$. Здесь $a^2 = 1$, $1^{1/2}$ имеет два значения: 1 и -1. Итак, $(a^2)^b$ не всегда совпадает с a^{2b}. $\square$

$\boxed{\text{1.77, 6), 3)}}$ Доказать следующие равенства (для корней берутся все их значения):

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}), \qquad \operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i+z}{i-z} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Решение. Следует помнить, что каждый из символов $\operatorname{Arsh} z$, $\sqrt{z}$ и $\operatorname{Ln} z$ служит обозначением для некоторого <u>множества</u> комплексных чисел. Эти множества определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} w \in \operatorname{Arsh} z &\iff \operatorname{sh} w = z, \\ w \in \sqrt{z} &\iff w^2 = z, \\ w \in \operatorname{Ln} z &\iff e^w = z. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} w \in \operatorname{Arsh} z \quad &\iff \operatorname{sh} w = z &&\iff \frac{e^w - e^{-w}}{2} = z \\ &\iff e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0 &&\iff (e^w - z)^2 = 1 + z^2 \\ &\iff e^w - z \in \sqrt{1+z^2} &&\iff e^w \in z + \sqrt{1+z^2} \\ &\iff w \in \operatorname{Ln}(z + \sqrt{1+z^2}). \end{aligned}$$

Выкладки для Arctg довольно похожи:

$$\begin{aligned} w \in \operatorname{Arctg} z \quad &\iff \operatorname{tg} w = z &&\iff \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = z \\ &\iff e^{2iw} - 1 = ize^{2iw} + iz &&\iff e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} \\ &\iff 2iw \in \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz} &&\iff w \in \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}. \end{aligned}$$

Можно преобразовать последнее выражение, умножая числитель и знаменатель последней дроби на i:

$$\operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz} = \operatorname{Ln} \frac{i-z}{i+z} = -\operatorname{Ln} \frac{i+z}{i-z}.$$

□

$\boxed{\text{A2}}$ Вычислить: $\operatorname{Arsh}(i\sqrt{2})$, $\operatorname{Arctg} \sqrt{3}$, $\operatorname{Arctg}(1+2i)$.

Решение. Пользуемся готовыми формулами из задачи 1.77.

1. Найдём $\operatorname{Arsh}(i\sqrt{2})$. Здесь $z = i\sqrt{2}$, $z^2 = -2$, $z^2+1 = -1$, $\sqrt{z^2+1} = \pm i$, $z + \sqrt{z^2+1} = i(\sqrt{2} \pm 1)$. Заметим, что $\arg(i\sqrt{2} \pm 1) = \frac{\pi}{2}$. Отсюда

$$\operatorname{Arsh}(i\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2} \pm 1) + i \cdot \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Найдём $\operatorname{Arctg} \sqrt{3}$. Здесь $z = \sqrt{3}$,

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{4} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \exp(2\pi i/3).$$

В итоге получаем:

$$\operatorname{Arctg}\sqrt{3} = \frac{1}{2i}(2\pi i/3 + 2k\pi i) = \frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Найдём $\operatorname{Arctg}(1+2i)$. Здесь $z = 1+2i$,

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1+i-2}{1-i+2} = \frac{-1+i}{3-i} = \frac{(-1+i)(3+i)}{10} = \\ = \frac{-4+2i}{10} = -\frac{2}{5} + \frac{i}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\exp(i\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + i\pi).$$

Отсюда

$$\operatorname{Arctg}(1+2i) = \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{2}\ln 5 + i\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + i\pi\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\ln 5}{4}\cdot i.$$

□

$\boxed{1.82,\ 1)}$ Решить уравнение: $\sin z + \cos z = 2$.
Решение. Свернём левую часть в одну тригонометрическую функцию. Для этого поделим обе части уравнения на «амплитуду» левой части, равную $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, после чего представим коэффициенты в левой части в виде косинуса и синуса одного и того же угла:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin z + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos z = \sqrt{2};$$
$$\sin\frac{\pi}{4}\sin z + \cos\frac{\pi}{4}\cos z = \sqrt{2};$$
$$\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

Полученное элементарное тригонометрическое уравнение решаем с помощью формулы из задачи 1.77, 1) (эту формулу предлагается вывести в домашней работе):

$$\operatorname{Arccos}\xi = -i\operatorname{Ln}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}).$$

В нашем случае $\xi = \sqrt{2}$, $\xi^2 - 1 = 1$,

$$z = \frac{\pi}{4} - i\operatorname{Ln}(\sqrt{2}\pm 1) = \frac{\pi}{4} - i(\ln(\sqrt{2}\pm 1) + 2k\pi i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}\pm 1).$$

□

Определить линии, указанные следующими уравнениями:

$\boxed{109}$ $z = 1 - it$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.
Решение. Это отрезок с началом в точке 1, направляющим вектором $-i$ и концом в точке $1 - 2i$. $\square$

$\boxed{111}$ $z = t^2 + it^4$, $t \in \mathbb{R}$.
Решение. Здесь $x = t^2$, $y = t^4$, т. е. $y = x^2$. При этом x пробегает $[0, +\infty)$ (сначала от $+\infty$ до 0, затем от 0 до $+\infty$). $\square$

$\boxed{113}$ $z = t + \dfrac{i}{t}, \quad -\infty < t < 0.$
Решение. Здесь $x = t$, $y = \dfrac{1}{t}$, т. е. $y = \dfrac{1}{x}$. При этом x пробегает открытый луч $(-\infty, 0)$. Получаем левую нижнюю ветвь школьной гиперболы. $\square$

$\boxed{1.114,\ 1)}$ $z = t + i\sqrt{1 - t^2}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.
Решение. 1-й способ решения. $x = t$, $y = \sqrt{1 - t^2} = \sqrt{1 - x^2}$. Это равносильно тому, что $y \geqslant 0$ и $x^2 + y^2 = 1$. Получаем верхнюю полуокружность единичной окружности.

2-й способ решения. Перейдём к такому параметру, чтобы избавиться от корней: $t = \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$. Тогда $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$. Правда, при такой параметризации ориентация кривой изменилась на противоположную. $\square$

$\boxed{1.115}$ 1) $z = a(t + i - ie^{-it})$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
Решение. Перейдём от экспоненты к тригонометрическим функциям:

$$z = a(t + i - i(\cos t - i\sin t)) = a(t + i - i\cos t - \sin t).$$

Выделим вещественную и мнимую части:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

Это параметрическое уравнение циклоиды. Движение точки по циклоиде есть сумма движений по прямой и по окружности. По такому пути движется точка обода колеса. Чтобы изобразить эту кривую, найдём $z(t)$ для нескольких значений t:

$$z(0) = 0, \quad z(\pi/2) = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + ai, \quad z(\pi) = a\pi + 2ai.$$

$\square$

$\boxed{116}$ Для отображения $w = z^2$ требуется:
1) найти образы линий $x = C$, $y = C$, $x = y$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ и выяснить, какие из них преобразуются взаимно однозначно;
2) найти прообразы (на z-плоскости) линий $u = C$, $v = C$ ($w = u + iv$).

Решение. 1. Пусть $x = C$, т. е. $z = C + yi$. Тогда $w = C^2 - y^2 + 2yi$. Будем обозначать $\operatorname{Re} w$ через u, $\operatorname{Im} w$ через v. Тогда $u = C^2 - y^2$, $v = 2y$. Это уравнение кривой параметрическом виде (y — параметр). Часто удобно перевести в другой вид — выразить одну координату через другую. В данной случае, $u = C^2 - \frac{v^2}{4}$. Это парабола с вершиной в точке C^2, ветви которой направлены влево.

2. Пусть $y = C$, т. е. $z = x + Ci$. Тогда $w = x^2 - C^2 + 2xi$, т. е. $u = x^2 - C^2$, $v = 2x$. Избавляемся от параметра x, выражаем u через v: $u = \frac{v^2}{4} - C^2$. Это парабола с вершиной в точке $-C^2$, ветви которой направлены вправо.

3. Пусть $x = y$, т. е. $z = x + xi$. Тогда $w = 2x^2 i$. Это луч с началом в точке 0, направленный вверх, пробегаемый два раза (сверху вниз и снизу вверх).

4. Пусть $|z| = R$, т. е. $z = R\cos\varphi + iR\sin\varphi$. Тогда $w = R^2\cos 2\varphi + iR^2\sin 2\varphi$. Получилась окружность радиуса R^2, пробегаемая два раза в положительном направлении.

5. Пусть $\arg z = \alpha$. Тогда $\arg w = 2\alpha$, где под $\arg w$ понимается одно из значений аргумента. Получается луч, исходящий из начала координат под углом 2α.

6. Пусть $u = C$. Это значит, что $x^2 - y^2 = C$. При $C \neq 0$ это гипербола в канонической форме. При $C > 0$ главная ось совпадает с осью абсцисс; при $C < 0$ — с осью ординат. При $C = 0$ уравнение вырождается к виду $x^2 - y^2 = 0$, и получается пара пересекающихся прямых (биссектрисы координатных углов).

7. Пусть $v = C$. Это значит, что $2xy = C$. При $C \neq 0$ получается школьная гипербола, асимптотами которой служат координатные оси. При $C > 0$ она расположена в I-й и III-й четвертях; при $C < 0$ — во II-й и IV-й. При $C = 0$ уравнение вырождается к виду $xy = 0$, и получается пара пересекающихся прямых (действительная и мнимая оси). $\square$