Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
12-е занятие. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана

Преобразования линий под действием функций комплексного переменного

$\boxed{1.116}$ Для отображения $w = z^2$ требуется:

1) найти образы линий $x = C$, $y = C$, $x = y$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ и выяснить, какие из них преобразуются взаимно однозначно;
2) найти прообразы (на z-плоскости) линий $u = C$, $v = C$ $(w = u + iv)$.

$\boxed{\text{A1}}$ Для отображения $w = \dfrac{1}{z}$ найти образ окружности $|z + i| = 1$.

$\boxed{\text{A2}}$ Для функции Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ найти образы окружностей $|z| = R$.

Условия Коши-Римана

$\boxed{\text{A3}}$ Пусть f — функция комплексного переменного, дифференцируемая в точке z_0, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + yi)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + yi)$. Выразить $f'(z_0)$ через частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке z_0. Вывести условия Коши-Римана.

$\boxed{1.131, \text{ часть}}$ Проверить выполнение условий Коши-Римана для функций z^2 (в $\mathbb{C}$) и $\ln z$ (в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$), где $\ln z$ — главное значение логарифма. Найти их производные.

$\boxed{1.135}$ Пусть $z = re^{i\varphi}$ и $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$. Записать уравнения Коши-Римана в полярных координатах.

$\boxed{\text{A4}}$ Проверить, что функция $v(x, y) = x^2 - y^2$ гармоническая в $\mathbb{R}^2$. Найти такую аналитическую функцию $f(z)$ в $\mathbb{C}$, что $\operatorname{Im} f(x + yi) = v(x, y)$.

Домашнее задание № 12
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{1.117}$ Для отображения $w = 1/z$ найти:
1) образы линий $x = C$, $y = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$, $|z-1| = 1$;
2) прообразы линий $u = C$, $v = C$, где $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$.

$\boxed{1.118}$ Для отображений $w = z + \dfrac{1}{z}$ и $w = z - \dfrac{1}{z}$ найти образы окружностей $|z| = R$.

$\boxed{1.119}$ Для преобразования $w = z + \dfrac{1}{z}$ найти на z-плоскости прообраз прямоугольной сетки ($u = C$, $v = C$) плоскости w.

$\boxed{1.121}$ Для отображения $w = e^x$ найти:
1) образы линий $x = C$, $y = C$, $x = y$;
2) прообразы линий $\rho = \theta$ $(0 \leqslant \theta < \infty)$.

$\boxed{1.131}$ Проверить выполнение условий Коши-Римана для функций z^3, e^z и $\cos z$. Найти их производные.

$\boxed{1.132,\ 1)}$ Найти постоянные a, b, c, при которых функция $f(z)$ будет аналитической:

$$f(z) = \cos x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \sin x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y).$$

С помощью условий Коши-Римана выяснить, в каких точках дифференцируемы следующие функции:

$\boxed{1.137}$ $f(z) = \bar{z}$. $\boxed{\text{A1}}$ $f(z) = z + |z|$.

$\boxed{1.133}$ $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$.

$\boxed{\text{A2}}$ Проверить, что функция $v(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ гармоническая в области $x > 0$. Найти такую аналитическую функцию $f(z)$ в области $\operatorname{Re} z > 0$, что $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + yi)$.

$\boxed{\text{A3}}$ Проверить, что функция $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ гармоническая в области $x > 0$. Найти такую аналитическую функцию $f(z)$ в области $\operatorname{Re} z > 0$, что $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + yi)$.

$\boxed{\text{A4}}$ Проверить, что функция $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ гармоническая в области $x^2 + y^2 \neq 0$. Найти такую аналитическую функцию $f(z)$ в области $z \neq 0$, что $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$.

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
12-е занятие. Конспект.
Функции комплексного переменного.
Условия Коши-Римана

$\boxed{1.116}$ Для отображения $w = z^2$ требуется:

1) найти образы линий $x = C$, $y = C$, $x = y$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ и выяснить, какие из них преобразуются взаимно однозначно;
2) найти прообразы (на z-плоскости) линий $u = C$, $v = C$ $(w = u + iv)$.

Решение. 1. Пусть $x = C$, т. е. $z = C + yi$. Тогда $w = C^2 - y^2 + 2yi$. Будем обозначать $\operatorname{Re} w$ через u, $\operatorname{Im} w$ через v. Тогда $u = C^2 - y^2$, $v = 2y$. Это уравнение кривой в параметрическом виде (y — параметр). Запишем уравнение в функциональном виде, т. е. выразим одну координату через другую. В данном случае, $u = C^2 - \frac{v^2}{4}$. Теперь видно, что это парабола с вершиной в точке C^2, ветви которой направлены влево.

2. Пусть $y = C$, т. е. $z = x + Ci$. Тогда $w = x^2 - C^2 + 2xi$, т. е. $u = x^2 - C^2$, $v = 2x$. Избавляемся от параметра x, выражаем u через v: $u = \frac{v^2}{4} - C^2$. Это парабола с вершиной в точке $-C^2$, ветви которой направлены вправо.

3. Пусть $x = y$, т. е. $z = x + xi$. Тогда $w = 2x^2 i$. Это луч с началом в точке 0, направленный вверх, пробегаемый два раза (сверху вниз и снизу вверх).

4. Пусть $|z| = R$, т. е. $z = R\cos\varphi + iR\sin\varphi$. Тогда $w = R^2\cos 2\varphi + iR^2\sin 2\varphi$. Получилась окружность радиуса R^2, пробегаемая два раза в положительном направлении.

5. Пусть $\arg z = \alpha$. Тогда $\arg w = 2\alpha$, где под $\arg w$ понимается одно из значений аргумента. Получается луч, исходящий из начала координат под углом 2α.

6. Пусть $u = C$. Это значит, что $x^2 - y^2 = C$. Если $C = 0$, то уравнение вырождается к виду $x^2 - y^2 = 0$, т. е. получается пара пересекающихся прямых (биссектрисы координатных углов). Если $C \neq 0$, то это гипербола в канонической форме. При $C > 0$ главная ось совпадает с осью абсцисс; при $C < 0$ — с осью ординат.

7. Пусть $v = C$. Это значит, что $2xy = C$. Если $C = 0$, то уравнение вырождается к виду $xy = 0$, т. е. получается пара пересекающихся прямых (действительная и мнимая оси). Если $C \neq 0$, то получается школьная гипербола, асимптотами которой служат координатные оси. При $C > 0$ она расположена в I-й и III-й четвертях; при $C < 0$ — во II-й и IV-й. $\square$

$\boxed{\text{А1}}$ Для отображения $w = \dfrac{1}{z}$ найти образ окружности $|z+i| = 1$.

Решение. 1-й путь (тригонометрический). Запишем исходную кривую в параметрической форме. Можно взять $z(t) = -i + e^{it}$, где $t \in [0, 2\pi]$, но тогда особая точка $z = 0$ получится при некотором промежуточном значении параметра. Лучше положить

$$z = -i + ie^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

чтобы особая точка $z = 0$ получалась при $t = 0$ и $t = 2\pi$. Тогда

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{-i + ie^{it}} &= \frac{1}{-i + i\cos t - \sin t} = \\ &= \frac{1}{-2i\sin^2\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \\ &= \frac{1}{-2\sin\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Из правила умножения комплексных чисел в тригонометрической форме следует, что обратным к числу $\cos\alpha + i\sin\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, является число $\cos\alpha - i\sin\alpha$. Поэтому

$$w = \frac{\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2}}{-2\sin\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} + \frac{i}{2}.$$

Когда t пробегает $(0, 2\pi)$, $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$ пробегает от $+\infty$ до $-\infty$, а $-\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$ пробегает от $-\infty$ до $+\infty$. Значит, w пробегает горизонтальную прямую $v = \frac{1}{2}$ слева направо. Точке $z = 0$ (т. е. значениям параметра $t = 0$ и $t = 2\pi$) соответствует бесконечно удалённая точка $w = \infty$.

2-й способ (алгебраический). Для решения этим способом понадобится формула $\boxed{|z|^2 = z \cdot \bar{z}}$.

$$\begin{aligned} |z+i| = 1 \iff |z+i|^2 = 1 \iff (z+i)(\bar{z}-i) = 1 \iff \\ \iff |z|^2 - iz + i\bar{z} + 1 = 1 \iff |z|^2 - iz + i\bar{z} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя $z = \frac{1}{w}$, получим:

$$\frac{1}{|w|^2} - \frac{i}{w} + \frac{i}{\bar{w}} = 0.$$

Умножим обе части на $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$:

$$1 - i\bar{w} + iw = 0 \iff i(w - \bar{w}) = -1 \iff i \cdot 2iv = -1 \iff v = \frac{1}{2}.$$

□

$\boxed{\text{A2}}$ Для функции Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ найти образы окружностей $|z| = R$.

Решение. Запишем окружность $|z| = R$ в параметрической форме: $z = R(\cos t + i \sin t)$, где $t \in [0, 2\pi]$. Напомним, что обратным к числу $\cos t + i \sin t$ является $\cos t - i \sin t$. Отсюда

$$w = \frac{1}{2}\left(R\cos t + iR\sin t + \frac{1}{R}\cos t - \frac{1}{R}\sin t\right) =$$
$$= \frac{R + \frac{1}{R}}{2}\cos t + i \cdot \frac{R - \frac{1}{R}}{2}\sin t.$$

Это параметрическое уравнение эллипса с центром в точке 0 и полуосями $a = \frac{R+1/R}{2}$, $b = \frac{|R-1/R|}{2}$, направленными вдоль действительной и мнимой оси, соответственно. Заметим, что при $R = 1/2$ получается тот же эллипс, что и при $R = 2$, но при $R = 1/2$ он обходится в отрицательном направлении. При $R = 1$ получается отрезок, соединяющий точки 1 и -1, проходимый два раза: сначала справа налево, затем слева направо. □

Условия Коши-Римана

$\boxed{\text{A3}}$ Пусть f — функция комплексного переменного, дифференцируемая в точке z_0, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + yi)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + yi)$. Выразить $f'(z_0)$ через частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке z_0. Вывести условия Коши-Римана.

Решение. Пусть $f'(z_0) = A + Bi$. Тогда

$$df(z_0) = f'(z_0)dz = (A + Bi)(dx + i\,dy) = (A\,dx - B\,dy) + (B\,dx + A\,dy)i.$$

С другой стороны,

$$df(z_0) = (u'_x\,dx + u'_y\,dy) + (v'_x\,dx + v'_y\,dy)i.$$

Отсюда

$$A = u'_x = v'_y, \qquad B = v'_x = -u'_y.$$

□

$\boxed{\text{1.131, часть}}$ Проверить выполнение условий Коши-Римана для функций z^2 (в $\mathbb{C}$) и $\ln z$ (в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$), где $\ln z$ — главное значение логарифма. Найти их производные.

Решение. 1. Пусть $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$. Легко видеть, что функции $u = x^2 - y^2$ и $v = 2xy$ гармонические, и для этой пары функций выполняются условия Коши-Римана:

$$u'_x = v'_y = 2x, \qquad v'_x = -u'_y = 2y.$$

Отсюда $f'(z) = u'_x + iv'_x = 2x + 2yi = 2z$.

2. В полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ главное значение логарифма можно записать в виде

$$f(z) = \ln z = \ln|z| + i \arg z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Таким образом, $u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$, $v(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$,

$$u'_x = v'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v'_x = -u'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Отсюда

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.$$

□

$\boxed{\text{A4}}$ Проверить, что функция $v(x, y) = x^2 - y^2$ гармоническая в $\mathbb{R}^2$. Найти такую аналитическую функцию $f(z)$ в $\mathbb{C}$, что $\operatorname{Im} f(x + yi) = v(x, y)$.

Решение. Проверка гармоничности тривиальна. Функцию $f(z)$ представим в виде $u(x, y) + iv(x, y)$. Нужно найти $u(x, y)$ из условий Коши-Римана:

$$u'_x = v'_y = -2y, \qquad u'_y = -v'_x = -2x.$$

Отсюда $u = -2xy + C$,

$$f(z) = -2xy + C + i(x^2 - y^2) = i(x^2 - y^2 + 2ixy) + C = iz^2 + C.$$

□