Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
14-е занятие. Числовые ряды.
Интегрирование функций комплексного переменного

$\boxed{\text{A1}}$ Доказать, что если ряд с комплексными членами сходится абсолютно, то он сходится.

$\boxed{1.84}$ Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и $|\arg c_n| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, то ряд сходится абсолютно. Указание: найти верхнюю оценку $|z|$ через $\operatorname{Re} z$.

$\boxed{1.87}$ Доказать формулу (преобразование Абеля):

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) - S_{m-1}b_m + S_n b_n,$$

где $1 \leqslant m \leqslant n$, $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ $(k \geqslant 1)$, $S_0 = 0$.

$\boxed{1.88}$ Доказать, что для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, где $b_n > 0$, достаточно, чтобы частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ были ограничены и последовательность чисел $\{b_n\}$ монотонно стремилась к 0 (признак Дирихле).

Исследовать сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$:

$\boxed{1.95}$ $c_n = \dfrac{n}{(2i)^n}$. $\boxed{1.97}$ $c_n = e^{in}$. $\boxed{1.99}$ $c_n = \dfrac{e^{in\varphi}}{n}$.

$\boxed{1.101}$ $c_n = \dfrac{1}{n} e^{\pi i/n}$. $\boxed{1.103}$ $c_n = \dfrac{\cos in}{2^n}$.

Интегрирование

$\boxed{3.1}$ Пусть C — простой замкнутый контур, ограничивающий площадь S. Доказать, что $\int\limits_C x\,dz = iS$.

$\boxed{3.3}$ Вычислить интегралы $I_1 = \int x\,dz$ и $I_2 = \int y dz$ по следующим путям:

1) по радиусу-вектору точки $z = 2 + i$;
2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (начало пути — в точке $z = 1$);
3) по окружности $|z - a| = R$.

Домашнее задание № 14
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{1.89}$ Доказать, что для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, где $b_n \in \mathbb{R}$, достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, а последовательность $\{b_n\}$ была монотонной и ограниченной.

Исследовать сходимость рядов:

$\boxed{1.96}$ $c_n = \dfrac{n!}{(in)^n}$. $\boxed{1.98}$ $c_n = \dfrac{e^{in}}{n}$.

$\boxed{1.100}$ $c_n = \dfrac{e^{in}}{n^2}$. $\boxed{1.104}$ $c_n = \dfrac{n \sin in}{3^n}$.

$\boxed{3.2}$ Пусть C — простой замкнутый контур, ограничивающий площадь S. Доказать, что

$$2)\ \int\limits_C y\, dz = -S, \qquad 3)\ \int\limits_C \bar{z}\, dz = 2iS.$$

$\boxed{3.4}$ Вычислить интеграл $|z|\, dz$ по следующим путям:

1) по радиусу-вектору точки $z = 2 - i$;
2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$ (начало пути — в точке $z = -i$);
3) по окружности $|z| = R$.

$\boxed{3.5}$ Вычислить интеграл $\int\limits_C |z|\, \bar{z}\, dz$, где C — замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z| = 1$ и отрезка $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$.

$\boxed{3.6}$ Вычислить интеграл $\int\limits_C \dfrac{z}{\bar{z}}\, dz$, где C — граница полукольца

$$\{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z| < 2,\ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

$\boxed{1.85 \text{ (доп.)}}$ Пусть сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$. Доказать, что если $\operatorname{Re} c_n \geqslant 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ будет также сходящимся.

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
14-е занятие. Конспект.
Ряды из комплексных элементов

$\boxed{\text{A1}}$ Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ сходится, то ряды из $\operatorname{Re} c_n$ и $\operatorname{Im} c_n$ тоже сходятся.

Решение. Это следует из неравенств $|\operatorname{Re} c_n| \leqslant |c_n|$ и $|\operatorname{Im} c_n| \leqslant |c_n|$. $\square$

$\boxed{1.84}$ Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и $|\arg c_n| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, то ряд сходится абсолютно. Указание: найти верхнюю оценку $|z|$ через $\operatorname{Re} z$.

Решение. Условие означает, что сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} c_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} c_n$. Нужно вывести отсюда сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$. Для этого попытаемся оценить сверху $|c_n|$ через $\operatorname{Re} c_n$.

Если $0 \leqslant \arg c_n \leqslant \alpha$, то, из-за убывания косинуса, $\cos(\arg c_n) \geqslant \cos\alpha$. Из-за чётности косинуса, аналогичная оценка имеет место и при $-\alpha \leqslant \arg c_n < 0$. Отсюда $\frac{\operatorname{Re} c_n}{|c_n|} \geqslant \cos\alpha$ и $|c_n| \leqslant \frac{\operatorname{Re} c_n}{\cos\alpha}$. Теперь сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ следует из признака сравнения. $\square$

$\boxed{1.87}$ Доказать формулу (преобразование Абеля):

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_{m-1} b_m + S_n b_n,$$

где $1 \leqslant m \leqslant n$, $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ $(k \geqslant 1)$, $S_0 = 0$.

Решение. Преобразуем левую часть, представив a_k как $S_k - S_{k-1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k = \\
&= \sum_{k=m}^{n} S_k b_k - \sum_{k=m}^{n} S_{k-1} b_k = \\
&= \sum_{k=m}^{n} S_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} S_k b_{k+1} = \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_{m-1} b_m + S_n b_n.
\end{aligned}$$

$\square$

$\boxed{1.88}$ Доказать, что для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, где $b_n > 0$, достаточно, чтобы частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ были ограничены и последовательность чисел $\{b_n\}$ монотонно стремилась к 0 (признак Дирихле).
Решение. Для определённости, будем считать, что $b_k \searrow 0$. Другое условие означает, что суммы S_n ограничены: $|S_n| \leqslant C$.

Чтобы доказать сходимость ряда, воспользуемся критерием Коши, т. е. покажем, что сумма $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k$ стремится к 0 при $m, n \to 0$. Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_n b_n - S_{m-1} b_m.$$

Легко видеть, что слагаемые $S_n b_n$ и $S_{m-1} b_m$ стремятся к 0 при $m, n \to 0$ (произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую). Теперь займёмся суммой:

$$\left| \sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) \right| \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} |S_k||b_k - b_{k+1}| \leqslant C \sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}|.$$

Из убывания b_k следует, что $b_k - b_{k+1} \geqslant 0$, и

$$C \sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = C \sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = C(b_m - b_n).$$

При $m, n \to \infty$ последнее выражение стремится к 0. □

Исследовать сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$:

$\boxed{1.95}$ $c_n = \dfrac{n}{(2i)^n}$.
Решение. Ряд абсолютно сходится по признаку Даламбера:

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}.$$

□

$\boxed{1.97}$ $c_n = e^{in}$.
Решение. $c_n \not\to 0$, поэтому ряд расходится (нарушено необходимое условие сходимости). □

$\boxed{1.99}$ $c_n = \dfrac{e^{in\varphi}}{n}$.

Решение. Сначала заметим, что результат может зависеть от φ. Если φ кратно 2π, то получается гармонический ряд (он расходится). Будем считать, что φ не кратно 2π. Тогда $e^{i\varphi} \neq 1$, и для суммирования экспонент можно применить формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{m} e^{in\varphi} = \frac{e^{i\varphi} - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}.$$

Видно, что эти суммы ограничены, а $\frac{1}{n} \searrow 0$. Ряд сходится по признаку Дирихле. $\square$

Заметим, что вычисление суммы ряда из задачи 1.99 — отдельная задача, причём довольно интересная.

$\boxed{1.101}$ $c_n = \dfrac{1}{n} e^{\pi i/n}$.

Решение. Прежде всего, $|c_n| = 1/n$, так что ряд не сходится абсолютно. Заметим, что $n \to \infty$ величина $e^{\pi i/n}$ стремится к пределу $e^0 = 1$. Поэтому $c_n \sim \frac{1}{n}$. Видимо, ряд не будет сходиться. Но как это доказать? Сразу мы не можем применить признак сравнения, так как элементы ряда не являются положительными числами.

Воспользуемся результатом задачи 1.84. При больших n числа c_n имеют малые аргументы: $\arg c_n = \frac{\pi}{n}$. Начиная с $n = 4$, $|\arg c_n| \leqslant \pi/4$. Если бы ряд сходился, то из задачи 1.84 следовало бы, что ряд абсолютно сходится, но это не так.

Задачу можно решить и с помощью разложения по формуле Тейлора. $\square$

$\boxed{1.103}$ $c_n = \dfrac{\cos in}{2^n}$.

Решение. В случае ряда с общим членом $\frac{\cos n}{2^n}$ получили бы сходимость по признаку Дирихле. Но величина $\cos in = \operatorname{ch} n$ ведёт себя совсем не так, как $\cos n$. Это ряд с положительными элементами, и можно воспользоваться признаком сравнения:

$$\frac{\operatorname{ch} n}{2^n} = \frac{e^n - e^{-n}}{2 \cdot 2^n} = \frac{e^n(1 - e^{-2n})}{2 \cdot 2^n} \sim \frac{(e/2)^n}{2} \to +\infty.$$

Ряд расходится. $\square$

Интегрирование

$\boxed{3.1}$ Пусть C — простой замкнутый контур, ограничивающий площадь S. Доказать, что $\displaystyle\int_C x\,dz = iS$.

Решение. Будем считать, что контур кусочно-дифференцируемый и имеет параметризацию $z(t) = x(t) + iy(t)$, где $t \in [t_1, t_2]$. Воспользуемся готовыми формулами из первого курса:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t)\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} x'(t)y(t)\,dt.$$

Получим:

$$\int_C x\,dz = \int_{t_1}^{t_2} x(t)(x'(t) + iy'(t))\,dt = \frac{1}{2}\,x^2(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + iS.$$

Осталось заметить, что $x(t_1) = x(t_2)$, так как контур замкнутый. $\square$

$\boxed{3.3}$ Вычислить интегралы $I_1 = \int x\,dz$ и $I_2 = \int y dz$ по следующим путям:

1) по радиусу-вектору точки $z = 2 + i$;
2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (начало пути — в точке $z = 1$);
3) по окружности $|z - a| = R$.

Решение. 1. Используем параметризацию $z(t) = (2 + i)t$, где $t \in [0, 1]$:

$$I_1 = \int_0^1 (2t) \cdot (2 + i)dt = 2 + i;$$

$$I_2 = \int_0^1 t \cdot (2 + i)dt = \frac{(2 + i)}{2} = 1 + \frac{i}{2}.$$

2. Используем параметризацию $z = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, \pi]$:

$$I_1 = \int_0^\pi \cos t \cdot (-\sin t + i \cos t)\,dt = \frac{i\pi}{2};$$

$$I_2 = \int_0^\pi \sin t \cdot (-\sin t + i \cos t)\,dt = -\frac{\pi}{2}.$$

3. Используем параметризацию $z = (\operatorname{Re} a + R\cos t) + i(\operatorname{Im} a + R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} (\operatorname{Re} a + R\cos t) \cdot R(-\sin t + i\cos t)\, dt = i\pi R^2;$$

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi} (\operatorname{Im} a + R\sin t) \cdot R(-\sin t + i\cos t)\, dt = -\pi R^2.$$

$\square$