Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
15-е занятие. Интегрирование функций комплексного переменного. Радиус сходимости степенного ряда

$\boxed{3.8}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ по следующим контурам:

1) по полуокружности $|z| = 1$, $y \geqslant 0$,
в начальной точке 1 считая $\sqrt{1} = 1$;
5) по окружности $|z| = 1$, в начальной точке -1 считая $\sqrt{-1} = i$.

$\boxed{3.9}$ Вычислить интеграл $\int_C \operatorname{Ln} z\, dz$, где:

1) C — единичная окружность и $\operatorname{Ln} 1 = 0$;
3) C — окружность $|z| = R$ и $\operatorname{Ln} R = \ln R$.

Интегральная формула Коши

$\boxed{3.20}$ Показать, что если C — произвольный простой замкнутый контур, не проходящий через точку a, и $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\int\limits_C (z-a)^n = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1,\ a \in \operatorname{int} C, \\ 0, & n = -1,\ a \in \operatorname{ext} C. \end{cases}$$

Здесь $\operatorname{int} C$ — внутренняя область контура C; $\operatorname{ext} C$ — внешняя область контура C.

$\boxed{3.28}$ Вычислить все возможные значения интеграла $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ при различных положениях контура C. Предполагается, что контур C не проходит ни через одну из точек 0, 1 и -1.

$\boxed{\text{A1}}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^2+1}, \quad a > 1.$

Радиус сходимости степенного ряда

$\boxed{3.40}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. $\boxed{3.41}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

$\boxed{3.46}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$. $\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n^2}\, z^n$.

Домашнее задание № 15
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{3.8\ (393)}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ по следующим контурам:

2) по полуокружности $|z| = 1$, $y \geqslant 0$, в начальной точке 1 считая $\sqrt{1} = -1$;
3) по полуокружности $|z| = 1$, $y \leqslant 0$, в начальной точке 1 считая $\sqrt{1} = 1$;
4) по окружности $|z| = 1$, в начальной точке 1 считая $\sqrt{1} = 1$.

$\boxed{3.9\ (394)}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_C \operatorname{Ln} z\, dz$, где:

2) C — единичная окружность и $\operatorname{Ln} i = \pi i/2$;
4) C — окружность $|z| = R$ и $\operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i$,

.

$\boxed{3.27\ (412)}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{z^2+9}$, если:

(1) точка $3i$ лежит внутри контура C, а точка $-3i$ — вне его;
(2) точка $-3i$ лежит внутри контура C, а точка $3i$ — вне его;
(3) точки $\pm 3i$ лежат внутри контура C.

Радиус сходимости

$\boxed{3.42\ (427)}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n.$ $\boxed{3.43\ (428)}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n.$

$\boxed{3.44\ (429)}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$ $\boxed{3.45\ (430)}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$

$\boxed{3.49\ (434)}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n.$ $\boxed{3.50\ (435)}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n.$

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
15-е занятие. Конспект.
Интегрирование функций комплексного переменного. Радиус сходимости степенного ряда

$\boxed{3.7,\ 2)}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z-a|=R} (z-a)^n\,dz$.

Эту формулу уже выводили на лекциях.

Решение. Используем параметризацию $z = a + R\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$I = R^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} \exp(nit)\cdot i\exp(it)\,dt.$$

При $n = -1$ под интегралом получается константа, так что $I = 2\pi i$. При $n \neq -1$:

$$I = iR^{n+1}\cdot\frac{1}{i(n+1)}\cdot\exp(i(n+1)t)\big|_0^{2\pi} = 0,$$

так как функция $\exp(i(n+1)t)$ принимает одинаковые значения в точках 0 и 2π. $\square$

$\boxed{3.8}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{z}}$ по следующим контурам:

1) по полуокружности $|z| = 1$, $y \geqslant 0$,
   в начальной точке 1 считая $\sqrt{1} = 1$;
5) по окружности $|z| = 1$, в начальной точке -1 считая $\sqrt{-1} = i$.

Решение. 1. Используем параметризацию

$$z = \exp(it), \quad t \in [0, \pi].$$

Общий вид квадратного корня: $\sqrt{z(t)} = \exp(i(t + 2k\pi)/2)$. Поскольку выбирается непрерывная ветвь, то k должно быть одним и тем же для всех $t \in [0, \pi]$. Подставляя начальное значение, получаем, что $k = 0$, т. е. получается следующая непрерывная ветвь корня: $\sqrt{z(t)} = \exp(it/2)$. Вычисляем интеграл:

$$I = \int\limits_0^{\pi}\frac{i\exp(it)\,dt}{\exp(it/2)} = i\cdot\int\limits_0^{\pi}\exp(it/2)\,dt = 2\exp(it/2)\big|_0^{\pi} = 2(i-1).$$

5. Чтобы пройти единичную окружность, начиная с точки -1, используем параметризацию

$$z(t) = \exp(i(t + \pi)), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Общий вид квадратного корня:

$$\sqrt{z(t)} = \exp(i(t + \pi + 2k\pi)/2), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Чтобы получить $\sqrt{z(0)} = i$, полагаем $k = 0$, т. е.

$$\sqrt{z(t)} = \exp(i(t + \pi)/2).$$

Отсюда

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{i\exp(i(t+\pi))\,dt}{\exp(i(t+\pi)/2)} = i\int_0^{2\pi} \exp(it/2)\exp(i\pi/2)\,dt =$$
$$= i\exp(it/2)\big|_0^{2\pi} = 2i(-1-1) = -4i.$$

□

$\boxed{3.9}$ Вычислить интеграл $\int_C \operatorname{Ln} z\,dz$, где:

1) C — единичная окружность и $\operatorname{Ln} 1 = 0$;
3) C — окружность $|z| = R$ и $\operatorname{Ln} R = \ln R$.

Решение. Имеется в виду, что функция под интегралом есть непрерывная ветвь логарифма с заданным значением в начальной точке.

1. $z(t) = \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\ln(z(t)) = it$,

$$I = \int_0^{2\pi} it \cdot i\exp(it)\,dt = -\int_0^{2\pi} t \cdot \exp(it)\,dt =$$
$$= \begin{bmatrix} u = t, & dv = \exp(it)\,dt \\ du = dt, & v = -i\exp(it) \end{bmatrix} =$$
$$= i\,t\exp(it)\big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \exp(it)\,dt = 2\pi i.$$

3. $z(t) = R\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\ln(z(t)) = \ln_0(R) + it$. Здесь через $\ln_0$ обозначно главное значение логарифма. По аналогии с предыдущим, получаем $2\pi Ri$. □

Интегральная теорема Коши

$\boxed{3.20}$ Показать, что если C — произвольный простой замкнутый контур, не проходящий через точку a, и $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\int\limits_C (z-a)^n = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1,\ a \in \operatorname{int} C, \\ 0, & n = -1,\ a \in \operatorname{ext} C. \end{cases}$$

Здесь $\operatorname{int} C$ — внутренняя область контура C; $\operatorname{ext} C$ — внешняя область контура C.
Решение. Если $a \in \operatorname{ext} C$, то функция $(z-a)^n$ голоморфна внутри C, и по интегральной теореме Коши интеграл равен 0. Если $a \in \operatorname{int} C$, то из интегральной теоремы Коши следует, что интеграл по C можно заменить интегралом по достаточно малой окружности, проходящей вокруг точки a. На лекции было доказано, что такой интеграл равен $2\pi i$ при $n = -1$ и равен 0 при $n \neq -1$. $\square$

$\boxed{3.28}$ Вычислить все возможные значения интеграла $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ при различных положениях контура C. Предполагается, что контур C не проходит ни через одну из точек 0, 1 и -1.
Решение. Сначала разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби (для этого можно использовать метод неопределённых коэффициентов):

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+1}.$$

Для каждой точки $a \in \{0, 1, -1\}$ обозначим через $I(a)$ интеграл от $f(z)\,dz$ по достаточно малой окружности вокруг a (настолько малой, что она не захватывает другие указанные точки).

Например, функции $\frac{1}{z-1}$ и $\frac{1}{z+1}$ голоморфны в окрестности 0, поэтому

$$I(0) = -\int \frac{dz}{z} = -2\pi i.$$

Аналогично, $I(1) = I(-1) = \pi i$.

Из интегральной теоремы Коши следует, что $I = \sum_{a \in \operatorname{int} C} I(a)$, где $\operatorname{int} C$ — внутренняя область контура C. Например, если контур C включает в себя все три точки, то

$$I = I(0) + I(1) + I(-1) = 0.$$

Если контур C включает в себя только 0 и 1, то $I = I(0) + I(1) = -\pi i$, и т. д. $\square$

$\boxed{\text{A1}}$ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^2+1}, \quad a > 1.$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}.$$

Внутрь контура $|z-a| = a$ попадает только точка i, поэтому второе слагаемое голоморфно внутри C, и интеграл от него равен нулю. А интеграл от первого слагаемого равен

$$\frac{1}{2}\int\limits_C \frac{dz}{z-i} = \frac{1}{2}\int\limits_{|z-i|=\delta} \frac{dz}{z-i} = pii.$$

$\square$

Радиус сходимости степенного ряда

Формула Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

$\boxed{3.40}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$

Решение. Здесь $|a_n| = 1/n$, $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$, $R = 1$. $\square$

$\boxed{3.41}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$

Решение. 1-й способ — использовать формулу Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n^n}{e^n}\cdot e^{\theta(n)}, \quad \text{где} \quad \theta(n) \to 0.$$

Отсюда $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$, $R = +\infty$.

2-й способ — использовать формулу Даламбера (которая работает не всегда):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Эта формула применима лишь в тех случаях, когда предел справа существует. В нашем случае он существует и равен 0. □

$\boxed{3.46}$ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$.

Решение. Здесь $a_n = 2^k$ при $n = k!$, $a_n = 0$ при остальных k. При вычислении верхнего предела можно рассмотреть только подпоследовательность $n = k!$:

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{k\to\infty} (2^k)^{1/k!} = \lim_{k\to\infty} 2^(k/k!) = 1.$$

Вывод: $R = 1$. □

$\boxed{\text{A2}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n^2} z^n$.

Решение. Разбиваем на две подпоследовательности и получаем, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3.$$

Отсюда $R = 1/3$. □