Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
16-е занятие. Степенные ряды. Ряды Тейлора

$\boxed{3.52}$ Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равен R $(0 < R < +\infty)$. Определить радиусы сходимости рядов:

$$1а)\ \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^n; \qquad 2б)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n; \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n; \qquad 5)\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^k z^n.$$

Просуммировать при $|z| < 1$ следующие ряды:

$$\boxed{\text{A1}}\quad \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) z^n; \qquad \boxed{3.54,\ 2)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}; \qquad \boxed{3.54,\ 3)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Исследовать поведение степенного ряда на границе круга сходимости:

$$\boxed{3.56}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}. \quad \boxed{3.57}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}. \quad \boxed{3.60}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}.$$

Вторая теорема Абеля: если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится, то

$$\lim_{r \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

$\boxed{3.63}$ Пользуясь второй теоремой Абеля и решением задачи 3.54, доказать следующие равенства:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right|, \quad \text{где } 0 < |\varphi| \leqslant \pi.$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\pi - \varphi}{2}, \quad \text{где } 0 < \varphi < 2\pi.$$

Разложить указанные функции в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и найти радиус сходимости:

$\boxed{\text{A2}}$ $\exp z$. $\boxed{3.67}$ $\operatorname{ch} z$. $\boxed{3.69}$ $\sin^2 z$.

$\boxed{\text{A3}}$ $\dfrac{1}{z-a}$, где $a \neq 0$. $\boxed{\text{A4}}$ $\dfrac{z}{z^2 - 3z - 15}$.

Домашнее задание № 16
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{3.52}$ Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равен R $(0 < R < +\infty)$. Определить радиусы сходимости рядов:

$$2)\ \sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 1)z^n; \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^n c_n z^n; \qquad 6)\ \sum_{n=0}^{\infty}(1 + z_0^n)c_n z^n.$$

$\boxed{3.54}$ Просуммировать при $|z| < 1$ следующие ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n z^n; \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}.$$

Исследовать поведение степенного ряда на границе круга сходимости:

$\boxed{3.55}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n.$ $\boxed{3.58}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n.$ $\boxed{3.61\text{ (доп.)}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}.$

$\boxed{3.59}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{pn}}{n}$, где $p \in \mathbb{N}$. (Рассмотреть $p = 2$, $p = 3$.)

$\boxed{3.63}$ Пользуясь второй теоремой Абеля и решением задачи 3.54, доказать следующие равенства:

$$3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right|, \quad \text{где} \quad 0 < |\varphi| < \pi.$$

$$4)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{где} \quad 0 < \varphi < \pi.$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos n\varphi}{n} = \ln\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right), \quad \text{где} \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

$$6)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\varphi}{2}, \quad \text{где} \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

Разложить указанные функции в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и найти радиус сходимости:

$\boxed{3.68}$ $\operatorname{sh} z.$ $\boxed{3.70}$ $\operatorname{ch}^2 z.$ $\boxed{3.73}$ $\frac{1}{az+b}$ $(b \neq 0).$ $\boxed{3.74}$ $\frac{z}{z^2 - 4z + 13}.$

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
16-е занятие. Конспект.
Степенные ряды. Ряды Тейлора

$\boxed{3.52}$ Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равен R $(0 < R < +\infty)$. Определить радиусы сходимости рядов:

$$1\text{а})\ \sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^n; \qquad 2\text{б})\ \sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n; \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n; \qquad 5)\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^k z^n.$$

Решение. Воспользуемся соотношением:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n b_n} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n},$$

где $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$, а $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ является конечным положительным числом.

В данном примере, по условию, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R$.

1а. $\varlimsup \sqrt[n]{n|c_n|} = \lim \sqrt[n]{n} \cdot 1/R = 1/R$. Для нового ряда радиус сходимости также равен R.

2б. $\varlimsup \sqrt[n]{n^k|c_n|} = \lim \sqrt[n]{n^k} \cdot 1/R = 1/R$. Для нового ряда радиус сходимости также равен R.

3. $\varlimsup \sqrt[n]{|c_n|/n!} = 1/R \cdot 0 = 0$. Для нового ряда радиус сходимости равен $+\infty$.

5. $\varlimsup \sqrt[n]{|c_n|^k} = 1/R^k$. Для нового ряда радиус сходимости равен R^k. $\square$

Для решения следующих примеров нужно хорошо знать формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1).$$

Просуммировать при $|z| < 1$ следующие ряды:

$\boxed{\text{А1}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+2) z^n.$

Решение. Рассмотрим ряд

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+2} = \frac{z^2}{1-z}.$$

Тогда
$$S(z) = \frac{A'(z)}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{2z(1-z)+z^2}{(1-z)^2} = \frac{2-z}{(1-z)^2}.$$
□

$\boxed{3.54,\ 2)}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Решение. Обозначим наш ряд через $S(z)$. Тогда
$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Отсюда $S(z) = -\ln(1-z)$, где ln — главное значение логарифма.

Действительно, раньше мы видели, что если $\ln z$ — главное значение логарифма при $\operatorname{Re} z > 0$, т. е.
$$\ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$
то $(\ln z)' = 1/z$. Следовательно, при $\operatorname{Re} z < 1$ для функции $\ln(1-z)$ производная равна $-1/(1-z)$. □

$\boxed{3.54,\ 3)}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

Решение. Обозначим исходный ряд через $S(z)$. Тогда $S(0) = 0$ и
$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$$

Отсюда, как и действительном анализе,
$$S(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},$$
но теперь ln — главное значение логарифма.

Отметим, что
$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1-|z|^2+2i\operatorname{Im} z}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2}.$$

Отсюда $\operatorname{Re}\dfrac{1+z}{1-z} = \dfrac{1-|z|^2}{1+|z|^2-2\operatorname{Re} z} > 0$ при $|z| < 1$. □

Исследовать поведение степенного ряда на границе круга сходимости:

$\boxed{3.56}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Решение. Здесь $R = 1$. На границе круга сходимости, т. е. при $|z| = 1$, мы можем записать z в виде $z = e^{i\varphi}$, где $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, и ряд будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}.$$

Видно, что ряд из абсолютных величин расходится. При $\varphi = 0$ также получаем расходящийся гармонический ряд. При остальных φ работает признак Дирихле, так как $1/n \searrow 0$ и

$$\left| \sum_{n=1}^{m} e^{in\varphi} \right| = \frac{|e^{i\varphi} - e^{i(m+1)\varphi}}{|1 - e^{i\varphi}|} \leqslant \frac{2}{|1 - e^{i\varphi}|},$$

где правая часть не зависит от n. □

$\boxed{3.57}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

Решение. $R = 1$. При $|z| = 1$ ряд сходится абсолютно. □

$\boxed{3.60}$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}$.

Решение. Здесь

$$|a_k| = \begin{cases} 1/\ln n, & k = 3n-1; \\ 0, & \text{при остальных } k. \end{cases}$$

При вычислении верхнего предела можно рассматривать только подпоследовательность $k = 3n - 1$:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = 1.$$

Для нахождения предела воспользовались оценками $\ln 2 \leqslant \ln n \leqslant n$ и теоремой о пределе зажатой последовательности.

При $z = e^{i\varphi}$, где $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{i(3n-1)\varphi}}{\ln n} = \frac{1}{e^{i\varphi}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{i(3\varphi+\pi)n}}{\ln n}.$$

Если $\varphi \in \{-\pi/3, \pi/3, \pi\}$, то общий член ряда принимает вид $1/\ln n$, и ряд расходится. Для остальных φ ряд сходится по признаку Дирихле. $\square$

Вторая теорема Абеля: если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится, то

$$\lim_{r\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

$\boxed{3.63}$ Пользуясь второй теоремой Абеля и решением задачи 3.54, доказать следующие равенства:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|$, где $0 < |\varphi| \leqslant \pi$).

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\pi-\varphi}{2}$, где $0 < \varphi < 2\pi$.

Решение. Как уже показали, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ сходится при $|z| < 1$, и его сумма равна $-\ln(1-z)$, где $\ln$ обозначает главное значение логарифма. Далее, ряды 1) и 2) представляют собой действительную и мнимую части этого ряда при $z = e^{i\varphi}$, и при указанных значениях φ они сходятся. Следовательно, по признаку Абеля, мы можем находить суммы этих рядов как предельные значения функции $-\ln(1-z)$.

1. Если $z = e^{i\varphi}$, где $\varphi \in (0, 2\pi)$, то

$$\begin{aligned}1 - z &= 1 - \cos\varphi - i\sin\varphi = \\ &= 2\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \\ &= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi-\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi-\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Здесь $\frac{\varphi}{2} \in (0,\pi)$, поэтому $\sin\frac{\varphi}{2} \geqslant 0$ и $\frac{\varphi-\pi}{2} \in (-\pi/2, \pi/2)$. Следовательно, $|1-z| = 2\sin\frac{\varphi}{2}$ и главное значение аргумента $(1-z)$ равно $\frac{\varphi-\pi}{2}$. Отсюда находим главное значение логарифма:

$$-\ln(1-e^{i\varphi}) = -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right| + i\frac{\pi-\varphi}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{Im}(-\ln(1-e^{i\varphi})) = \frac{\pi-\varphi}{2} \qquad \text{при} \qquad \varphi \in (0, 2\pi),$$

что и требовалось доказать.

2. Теперь $0 < |\varphi| < \pi$. Как и раньше,

$$1 - z = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi-\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi-\pi}{2}\right),$$

но теперь нельзя утверждать, что $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$. Рассуждаем по-другому: из основного тригонометрического тождества следует, что абсолютная величина большой скобки равна 1. Следовательно, $|1-z| = \left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|$, и

$$\operatorname{Re}(-\ln(1-e^{i\varphi})) = -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

□

Разложить указанные функции в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и найти радиус сходимости:

$\boxed{\text{A2}}$ $\exp(z)$.

Решение. Как нетрудно проверить, $\exp'(z) = \exp(z)$. Отсюда находим значения производных в точке 0: $\exp^{(n)}(0) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. По формуле Тейлора,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

□

$\boxed{3.67}$ $\operatorname{ch} z$.

Решение. Используем формулу $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ и готовое разложение для экспоненты:

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n - (-z)^n}{2n!} = \sum_{a_n z^n} n!,$$

где $a_n = 1$ при чётном n и $a_n = 0$ при нечётном n. Подставляя $n = 2k$, получим:

$$\operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

□

$\boxed{3.69}$ $\sin^2 z$.

Решение. Используем формулу понижения:

$$\sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4} = \frac{1 - \cos 2z}{2},$$

а также формулу Тейлора для косинуса:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

В результате,

$$\sin^2 z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{2 \cdot (2n)!}.$$

$\square$

$\boxed{\text{A3}}$ $\dfrac{1}{z-a}$, где $a \neq 0$.

Решение. В знаменателе выносим за скобку $-a$:

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{a}},$$

затем пользуемся формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии в другую сторону:

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

$\square$

$\boxed{\text{A4}}$ $\dfrac{z}{z^2 - 2z - 15}$.

Решение. Сначала разложим данную дробь на элементарные дроби:

$$\frac{z}{(z-5)(z+3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-3}.$$

Затем используем формулу из предыдущего примера:

$$\frac{z}{(z-5)(z+3)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{5^{n+1}} \right) z^n.$$

$\square$