Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
17-е занятие. Ряды Тейлора

Повторим формулы для главного значения логарифма.

$\boxed{\text{A1}}$ В этой задаче через $\ln z$ обозначим главное значение $\operatorname{Ln} z$. Найти:
1) $\ln z$ для $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$ и $-\pi < \varphi \leqslant \pi$;
2) $\operatorname{Re}(\ln z)$ для $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$;
3) $\operatorname{Re}(\ln z)$ для $z = r(\sin\varphi + i\cos\varphi)$, где $r > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$.

$\boxed{3.63}$ Пользуясь второй теоремой Абеля и решением задачи 3.54, доказать следующие равенства:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|$, где $0 < |\varphi| \leqslant \pi$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\pi - \varphi}{2}$, где $0 < \varphi < 2\pi$.

Разложить указанные функции в степенной ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и найти радиус сходимости:

$\boxed{\text{A2}}$ $\exp z$. $\boxed{3.67}$ $\operatorname{ch} z$. $\boxed{3.69}$ $\sin^2 z$.

$\boxed{\text{A3}}$ $\dfrac{1}{z-a}$, где $a \neq 0$.

$\boxed{\text{A4}}$ $\dfrac{z}{z^2 - 3z - 15}$.

$\boxed{\text{A5}}$ $\dfrac{1}{z^2 - 2z + 10}$.

$\boxed{3.71}$ $f(z)$ — непрерывная ветвь $(a+z)^{\alpha}$, для которой $f(0) = \exp(\alpha \ln a)$, где $\ln a$ — главное значение $\operatorname{Ln} a$.

$\boxed{3.77}$ $f(z)$ — непрерывная ветвь $\operatorname{Arctg} z$, для которой $f(0) = 0$.

Домашнее задание № 17
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{3.63}$ Пользуясь второй теоремой Абеля и решением задачи 3.54, доказать следующие равенства:

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \left|\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right|, \quad$ где $\quad 0 < |\varphi| < \pi.$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad$ где $\quad 0 < \varphi < \pi.$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n\varphi}{n} = \ln\left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right), \quad$ где $\quad 0 < \varphi < 2\pi.$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\varphi}{2}, \quad$ где $\quad -\pi < \varphi < \pi.$

Разложить указанные функции в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и найти радиус сходимости:

$\boxed{3.68}$ $\operatorname{sh} z$. $\quad$ $\boxed{3.70}$ $\operatorname{ch}^2 z$.

$\boxed{3.73}$ $\dfrac{1}{az+b}$ $\quad (b \neq 0)$. $\quad$ $\boxed{3.74}$ $\dfrac{z}{z^2 - 4z + 13}$.

$\boxed{3.75}$ $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$.

$\boxed{3.72}$ $f(z)$ — непрерывная ветвь $\sqrt{z+i}$, для которой $f(0) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{3.76}$ $\ln \dfrac{1+z}{1-z}$, где ln — главное значение логарифма.

$\boxed{3.78}$ $f(z)$ — непрерывная ветвь $\operatorname{Arsh} z$, для которой $f(0) = 0$.

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
16-е занятие. Конспект.
Степенные ряды. Ряды Тейлора

Повторим формулы для главного значения логарифма.

$\boxed{\text{A1}}$ В этой задаче через $\ln z$ обозначим главное значение $\operatorname{Ln} z$. Найти:
1) $\ln z$ для $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$ и $-\pi < \varphi \leqslant \pi$;
2) $\operatorname{Re}(\ln z)$ для $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$;
3) $\operatorname{Re}(\ln z)$ для $z = r(\sin\varphi + i\cos\varphi)$, где $r > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$.

Решение. Главное значение логарифма определяется формулой

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,$$

где $\arg z$ — главное значение аргумента.

1. Здесь $|z| = r$, $\arg z = \varphi$, поэтому $\ln z = \ln r + i\varphi$.

2. Здесь мы сразу не можем указать главного значения аргумента (оно зависит от того, какому промежутку принадлежит φ), но это и не требуется. Найдём $|z|$:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r.$$

Отсюда $\operatorname{Re}(\ln z) = \ln r$.

3. Аналогично, $|z| = r$, $\operatorname{Re}(\ln z) = \ln r$. $\square$

$\boxed{3.63}$ Пользуясь второй теоремой Абеля и решением задачи 3.54, доказать следующие равенства:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|, \quad \text{где } 0 < |\varphi| \leqslant \pi.$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\pi-\varphi}{2}, \quad \text{где } 0 < \varphi < 2\pi.$

Решение. Напомним, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = -\ln(1-z), \tag{1}$$

где $\ln$ — главное значение логарифма. Ряды 1) и 2) представляют собой соответственно действительную и мнимую части ряда (1) при $z = e^{i\varphi}$.

Радиус сходимости ряда равен 1, поэтому теорема Абеля в нашем случае принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{e^{ni\varphi}}{n} = \lim_{r\to 1-0}(-\ln(1-re^{i\varphi})).$$

Напомним, что $e^{i\varphi}$ при $\varphi \neq 2k\pi$ пробегает единичную окружность за исключением точки 1. Поэтому $1-re^{i\varphi}$ пробегает окружность с центром 1 радиуса 1, за исключением точки 0. В этих точках функция ln непрерывна, поэтому

$$\lim_{r\to 1-0}(-\ln(1-re^{i\varphi})) = -\ln(1-e^{i\varphi}).$$

Чтобы вычислить этот логарифм, распишем $e^{i\varphi}$ через тригонометрические функции и воспользуемся формулами двойного угла:

$$1-e^{i\varphi} = 1-\cos\varphi - i\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Отсюда $|1-e^{i\varphi}| = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n} = \operatorname{Re}(-\ln(1-e^{i\varphi})) = -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Это ответ к задаче 1).

Для решения задачи 2) нужно перевести $1-e^{i\varphi}$ в тригонометрическую форму. Для этого используем формулы приведения:

$$1-e^{i\varphi} = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi-\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi-\pi}{2}\right).$$

При $\varphi \in (0, 2\pi)$ число $\frac{\varphi-\pi}{2}$ принадлежит $(-\pi/2, \pi/2)$ и является главным значением аргумента $1-e^{i\varphi}$. Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n} = \operatorname{Im}(-\ln(1-e^{i\varphi})) = -\arg(1-e^{i\varphi}) = \frac{\pi-\varphi}{2}.$$

Второй способ вычисления $|1-e^{i\varphi}|$:

$$|1-e^{i\varphi}| = \sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi} = \sqrt{2-2\cos\varphi} = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Для вычисления $\arg(1 - e^{i\varphi})$ воспользуемся формулой $\arg(x + yi) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, которая работает при $x > 0$:

$$\arg(1 - e^{i\varphi}) = \operatorname{arctg} \frac{-\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = -\operatorname{arctg} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = -\frac{\pi - \varphi}{2}.$$

$\square$

Разложить указанные функции в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и найти радиус сходимости:

$\boxed{\text{A2}}$ $\exp(z)$.

Решение. Доказали на лекции: $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. $\square$

$\boxed{3.67}$ $\operatorname{ch} z$.

Решение. Используем формулу $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ и готовое разложение для экспоненты:

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n - (-z)^n}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!},$$

где $a_n = 1$ при чётном n и $a_n = 0$ при нечётном n. Подставляя $n = 2k$, получим:

<u>Ответ</u>: $\operatorname{ch} z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$. $\square$

$\boxed{3.69}$ $\sin^2 z$.

Решение. Используем формулу понижения:

$$\sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4} = \frac{1 - \cos 2z}{2},$$

а затем формулу Тейлора для косинуса:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

<u>Ответ</u>: $\sin^2 z = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{2 \cdot (2n)!}$. $\square$

$\boxed{\text{A3}}$ $\dfrac{1}{z - a}$, где $a \neq 0$.

Решение. В знаменателе выносим за скобку множитель $-a$:

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{a}},$$

затем пользуемся формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии в другую сторону:

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

Найдём радиус сходимости:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|a|^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{|a|}.$$

Отсюда $R = |a|$. К такому же ответу можно было прийти другим способом, непосредственно исходя из формулы $\dfrac{1}{z-a}$. С одной стороны, функция непрерывно дифференцируема в открытом круге при $|z| < |a|$, поэтому $R \geqslant |a|$. С другой стороны, сумма степенного ряда представляет собой непрерывную функцию, а у нашей функции есть бесконечный разрыв в точке $z = a$. Поэтому $R \leqslant |a|$. Вывод: $R = |a|$. □

$\boxed{\text{A4}}$ $\dfrac{z}{z^2 - 2z - 15}$.

Решение. Сначала разложим данную дробь на элементарные дроби:

$$\frac{z}{(z-5)(z+3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-3}.$$

Затем используем формулу из предыдущего примера:

$$\frac{z}{(z-5)(z+3)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{5^{n+1}} \right) z^n.$$

Радиус сходимости можно посчитать двумя способами. В любом случае, получится расстояние от 0 до ближайшего корня знаменателя, т. е. $R = 3$. □

$\boxed{\text{A5}}$ $\dfrac{1}{z^2 - 2z + 10}$.

Решение. Отличие от предыдущего примера состоит в том, что знаменатель имеет комплексные корни $1+3i$ и $1-3i$. Используем метод неопределённых коэффициентов:

$$\frac{1}{z^2 - 2z + 10} = \frac{C_1}{z-(1+3i)} + \frac{C_2}{z-(1-3i)}.$$

Избавляемся от знаменателя:

$$1 = C_1(z - (1-3i)) + C_2(z - (1+3i)).$$

Подставляя $z = 1 - 3i$, получим: $C_2 \cdot (-6i) = 1$, откуда $C_2 = i/6$. Аналогично, $C_1 = -i/6$. Отсюда

$$\frac{1}{z^2 - 2z + 10} = -\frac{i}{6} \cdot \frac{1}{z - (1-3i)} + \frac{i}{6} \cdot \frac{1}{z - (1+3i)} =$$
$$= \frac{i}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(1-3i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+3i)^{n+1}} \right) \cdot z^n.$$

$R = \max(|1-3i|, |1+3i|) = \max(\sqrt{10}, \sqrt{10}) = \sqrt{10}$. □

$\boxed{3.71}$ $f(z)$ — непрерывная ветвь $(a+z)^\alpha$, для которой $f(0) = \exp(\alpha \ln a)$, где $\ln a$ — главное значение $\operatorname{Ln} a$.

Решение. В некоторой окрестности 0 эту непрерывную ветвь можно определить формулой

$$f(z) = \exp(\alpha \ln(a+z)),$$

где ln — непрерывная ветвь логарифма, которая в точке a совпадает с главным значением логарифма. Отсюда можно вывести (мы этого делать не будем), что при $n \geqslant 1$

$$f^{(n)}(z) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot (\alpha - n + 1) \cdot \exp((\alpha - n)\ln(a+z))$$

и

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \cdot (\alpha - n + 1) \cdot \frac{\exp(\alpha \ln a)}{a^n}.$$

Поэтому ряд Тейлора имеет следующий вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} =$$
$$= \exp(\alpha(\ln a)) + \exp(\alpha \ln a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n+1)}{n!} \cdot \frac{z^n}{a^n}.$$

Радиус сходимости удобно находить с помощью формулы Даламбера:

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{|\alpha - n|}{(n+1)|a|} \to \frac{1}{|a|}.$$

Отсюда $R = |a|$. □

$\boxed{3.77}$ $f(z)$ — непрерывная ветвь $\operatorname{Arctg} z$, для которой $f(0) = 0$.
Решение. Вспоминаем формулу для $\operatorname{Arctg} z$:

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i+z}{i-z}.$$

В точке $z = 0$ нужно получить значение 0. Значит, в некоторой окрестности этой точки

$$f(z) = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z},$$

где ln — главное значение логарифма.

$$f'(z) = \frac{i}{2} \cdot \frac{i-z}{i+z} \cdot \frac{(i-z)+(i+z)}{(i-z)^2} = -\frac{1}{(i+z)(i-z)} = \frac{1}{1+z^2}.$$

Мы доказали, что производная нашей непрерывной ветви Arctg равна $\dfrac{1}{1+z^2}$, как и в действительном анализе. Для функции $\dfrac{1}{1+z^2}$ разложение очень простое:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

Чтобы получить отсюда разложение $f(z)$, нужно почленно интегрировать:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Легко видеть, что $R = 1$. $\square$