Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
18-е занятие. ИОТОХ. Вычеты

Говорят, что z_0 есть *корень кратности* k аналитической функции f, если $f^{(n)}(z_0) = 0$ при $n < k$ и $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Определить кратность корня z_0 функции f:

$\boxed{\text{A1}}$ $f(z) = \sin z$, $z_0 = \pi$. $\boxed{\text{A2}}$ $f(z) = \cos z - 1$, $z_0 = 0$.

$\boxed{\text{A3}}$ $f(z) = \exp z$, $z_0 = 3$.

Найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функций на бесконечности.

$\boxed{4.23}$ $\dfrac{1}{z - z^3}$. $\boxed{4.25}$ $\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$. $\boxed{\text{A4}}$ $e^{1/z}$.

$\boxed{\text{A5}}$ $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\sin z}$. $\boxed{4.29}$ ze^{-z}.

Вычисление вычетов

Если a — простой полюс f, то $\operatorname*{res}_a f = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$.

Если a — полюс f порядка n, то

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}((z-a)^n f(z))^{(n-1)}.$$

Найти вычеты указанных функций относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удалённой точки, если она не является предельной для особых точек.

$\boxed{4.79}$ $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$. $\boxed{4.85}$ $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

Если $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_a \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (*)$$

$\boxed{4.86}$ $\operatorname{tg} z$.

В следующих примерах для вычисления вычетов придётся раскладывать функции в ряды.

$\boxed{4.90}$ 1) $\cos\dfrac{1}{z-2}$. 2) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$.

$\boxed{4.91}$ $e^{z+1/z}$.

Домашнее задание № 18
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

По лекциям и учебникам повторить определение кратности корня и классификацию ИОТОХ!

Найти кратность корня z_0 заданной функции:

$\boxed{\text{A1}}$ $z^3 - 2z^2 + z$, $z_0 = 1$. $\boxed{\text{A2}}$ $e^z - 1 - z$, $z_0 = 0$.

$\boxed{\text{A3}}$ $\operatorname{tg} z - \sin z$, $z_0 = 0$. $\boxed{\text{A4}}$ $\exp(z) - 1$, $z_0 = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функций на бесконечности:

$\boxed{4.24\ (566)}$ $\dfrac{z^4}{1+z^4}$. $\boxed{4.26\ (568)}$ $\dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$.

$\boxed{4.28\ (570)}$ $\dfrac{z^2+1}{e^z}$. $\boxed{4.30\ (572)}$ $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$.

$\boxed{\text{T1}}$ Доказать формулу (*) для вычисления вычета в простом полюсе.

$\boxed{\text{T2}}$ Пусть $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции φ и ψ аналитичны в некоторой окрестности точки z_0, причём z_0 является корнем кратности m функции φ и корнем кратности n функции ψ. Доказать, что при $m \geqslant n$ точка z_0 будет корнем кратности $m - n$ функции f, а при $m < n$ точка z_0 будет полюсом кратности $n - m$ функции f.

Найти вычеты указанных функций относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удалённой точки, если она не является предельной для особых точек.

$\boxed{4.81\ (623)}$ $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, где $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{4.82\ (624)}$ $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$.

$\boxed{4.83\ (625)}$ $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

$\boxed{4.84\ (626)}$ $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

$\boxed{4.87\ (629)}$ $\dfrac{1}{\sin z}$.

$\boxed{4.92\ (634)}$ $\sin z \cdot \sin \dfrac{1}{z}$.

$\boxed{4.93\ (635)}$ $\sin \dfrac{z}{z+1}$. Подсказка: $\sin(\alpha + \beta)$.

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
18-е занятие. Конспект. Вычеты

Кратность корня

Говорят, что z_0 есть *корень кратности* k аналитической функции f, если $f^{(n)}(z_0) = 0$ при $n < k$ и $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Определить кратность корня z_0 функции f:

$\boxed{\text{A1}}$ $f(z) = \sin z$, $z_0 = \pi$.
Решение. $f(\pi) = 0$. $f'(z) = \cos z$. $f'(\pi) = -1 \neq 0$.
Ответ: Это простой корень (корень кратности 1). □

$\boxed{\text{A2}}$ $f(z) = \cos z - 1$, $z_0 = 0$.
Решение. $f(0) = 0$, $f'(z) = -\sin z$, $f'(0) = 0$, $f''(z) = -\cos z$, $f''(0) = -1 \neq 0$.
Ответ: Корень кратности 2. □

$\boxed{\text{A3}}$ $f(z) = \exp(z)$, $z_0 = 3$.
Решение. $f(3) \neq 0$. Точка 3 не является корнем функции $\exp(z)$. Другими словами, это корень кратности 0. □

Характер особых точек

Найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функций на бесконечности.

$\boxed{4.23}$ $\dfrac{1}{z - z^3}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители: $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)(1+z)}$.
Особые точки: 0, 1, -1, ∞.

В точках 0, 1, -1 функция стремится к ∞. Значит, это полюсы. Поскольку числитель в этих точках не равен 0, а для знаменателя это корни кратности 1, то для функции f это полюсы порядка 1.

$f(\infty) = 0$, поэтому ∞ есть устранимая особая точка. □

$\boxed{4.25}$ $\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$.

Решение. Особые точки: 1, ∞.

1 — полюс порядка 2.

$f(\infty) = \infty$. Значит, ∞ — полюс функции f. □

$\boxed{\text{A4}}$ $e^{1/z}$.

Решение. Особые точки: 0, ∞.

Воспользуемся формулой Тейлора для экспоненты:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}.$$

Эта формула работает при любом $z \neq 0$. Получили разложение Лорана для функции $e^{1/z}$ в проколотой окрестности точки 0. Это разложение содержит бесконечно число членов ряда с отрицательными степенями. Поэтому 0 — существенная особая точка.

$f(\infty) = 0$, поэтому ∞ — устранимая особая точка. □

$\boxed{\text{A5}}$ $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\sin z}$.

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю:

$$f(z) = \frac{\sin z - z}{z \cdot \sin z}.$$

Отсюда видно, что точки вида $z = k\pi$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — полюсы первого порядка.

Исследуем поведение в точке $z = 0$. Разложим числитель:

$$\sin z - z = -\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

Отсюда видно, что 0 — корень числителя кратности 3. Для знаменателя точка 0 является корнем кратности 2. Значит, для функции f точка 0 будет устранимой особой точкой и корнем кратности 1

На бесконечности функция предела не имеет. Чтобы это показать, достаточно рассмотреть последовательности $z_n = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и $z_n = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Поэтому ∞ является существенной особой точкой. □

$\boxed{4.29}$ ze^{-z}.

Решение. Экспонента не обращается в 0, поэтому конечных особых точек нет. Исследуем поведение на бесконечности. $f(n) \to 0$. $f(-n) \to -\infty$. Значит, не существует предела на бесконечности, т. е. ∞ — существенная особая точка функции f. □

Вычисление вычетов

Найти вычеты указанных функций относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удалённой точки, если она не является предельной для особых точек.

$\boxed{4.79}$ $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$.

Решение. Представляем функцию в виде

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)(1+z)}$$

и видим, что имеется 4 особые точки: 0, 1, -1, ∞.

$\boxed{z = 0}$ — полюс третьего порядка. Умножаем на z^3:

$$F(z) := z^3 f(z) = \frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z},$$

находим вторую производную:

$$F'(z) = \frac{1/2}{(1-z)^2} - \frac{1/2}{(1+z)^2}, \qquad F''(z) = \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{1}{(1+z)^3}$$

и её значение в точке 0: $F''(0) = 2$. Отсюда

$$\operatorname*{res}_0 f = \frac{1}{2!} F''(0) = 1.$$

К этому же результату можно было прийти проще, раскладывая функцию в ряд Лорана в проколотой окрестности точки 0:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-z^2} = \frac{1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots}{z^3} = \frac{1}{z} + z + z^3 + \ldots.$$

Коэффициент при z^{-1} — это и есть вычет.

$\boxed{z = 1}$ — простой полюс.

$$F(z) := (z-1) f(z) = -\frac{1}{z^3(1+z)}, \qquad \operatorname*{res}_1 f = F(1) = -\frac{1}{2}.$$

$\boxed{z = -1}$ — простой полюс.

$$F(z) := (z+1) f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)}, \qquad \operatorname*{res}_{-1} f = F(-1) = -\frac{1}{2}.$$

$\boxed{z = \infty}$ Функция имеет конечное число конечных особых точек. Поэтому вычет в ∞ можно найти по формуле

$$\operatorname*{res}_\infty f = -(\operatorname*{res}_0 f + \operatorname*{res}_1 f + \operatorname*{res}_{-1} f) = 0.$$

$\square$

$\boxed{4.85}$ $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

Решение. Особые точки: $0, 3i, -3i, \infty$.

$\boxed{z=0}$ — полюс второго порядка.

$$F(z) := \frac{e^z}{z^2+9}, \qquad F'(z) = \frac{e^z(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2}, \qquad \operatorname*{res}_0 f = F'(0) = \frac{1}{9}.$$

$\boxed{z=3i}$ — полюс первого порядка.

$$F(z) := \frac{e^z}{z^2(z+3i)}, \quad \operatorname*{res}_{3i} f = F(3i) = \frac{i}{54}e^{3i} = \frac{1}{54}(-\sin 3 + i\cos 3).$$

$\boxed{z=-3i}$ — полюс первого порядка.

$$F(z) := \frac{e^z}{z^2(z-3i)}, \quad \operatorname*{res}_{-3i} f = F(-3i) = -\frac{i}{54}e^{-3i} = \frac{1}{54}(-\sin 3 - i\cos 3).$$

$\boxed{z=\infty}$ $\operatorname*{res}_{\infty} f = \dfrac{1}{27}\sin 3 - \dfrac{1}{9}$. $\square$

Если $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_a \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{$*$}$$

$\boxed{4.86}$ $\operatorname{tg} z$.

Решение. Заметим, что cos имеет простые корни в точках $z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. В этих точка sin не обращается в 0. Следовательно, для tg это простые корни.

$$\operatorname*{res}_{\frac{\pi}{2}+k\pi} \operatorname{tg} z = \frac{\sin(z_k)}{-\sin(z_k)} = -1.$$

В этом примере точка ∞ является предельной точкой для множества конечных полюсов функции f, т. е. не является *изолированной* особой точкой функции f. Значит, о вычете в ∞ говорить не приходится. $\square$

В следующих примерах для вычисления вычетов придётся раскладывать функции в ряды.

$\boxed{4.90,\ 1)}$ $\cos\dfrac{1}{z-2}$.

Решение. Особые точки: $2, \infty$.

$\boxed{z=2}$ В разложение $\cos t$ по степеням t подставим $t = \dfrac{1}{z-2}$:

$$\cos\frac{1}{z-2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(z-2)^4} + \ldots$$

Видим, что коэффициент при $(z-2)^{-1}$ равен 0. Следовательно, $\operatorname*{res}\limits_{2} f = 0$ и $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f = 0$. □

$\boxed{4.90,\ 2)}$ $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$.

Решение. Разложим z^3 по степеням $(z-2)$:

$$z^3 = ((z-2)+2)^3 = (z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8,$$

умножим это выражение на разложение $\cos\dfrac{1}{z-2}$:

$$z^3\cos\frac{1}{z-2} = \big((z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8\big)\cdot \\ \cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(z-2)^4} + \ldots\right).$$

Находим коэффициент при $(z-2)^{-1}$: $\operatorname*{res}\limits_{2} f = -6 + \dfrac{1}{24} = -\dfrac{143}{24}$. Отсюда $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f = \dfrac{143}{24}$. □

$\boxed{4.91}$ $e^{z+1/z}$.

Решение. Особые точки: 0, ∞. Перемножим разложения функций $\exp(z)$ и $\exp(1/z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{-k}}{k!}.$$

Степень z^{-1} получается при умножении слагаемых с индексами n и k, когда $k = n+1$. Значит, $\operatorname*{res}\limits_{0} f = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\cdot(n+1)!}$. Вычет в ∞ отличается знаком. □