Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
19-е занятие. Вычеты.
Вычисление интегралов с помощью вычетов

Найти вычеты функции в особых точках:

$\boxed{4.91}$ $e^{z+1/z}$. $\boxed{\text{A1}}$ $\sin\dfrac{z+4}{z-1}$. Подсказка: $\sin(\alpha+\beta)$.

Теорема о вычетах:

$$\boxed{\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in A} \operatorname*{res}_a f,}$$

где A — множество особых точек, лежащих внутри γ (это множество должно быть конечным).

Вычислить интегралы с помощью вычетов:

$\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}\,dz$, где C: $|z|=1$.

$\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{z\,dz}{\sin z}$, где C: $\left|z-\frac{3\pi}{2}\right| = 2\pi$.

$\boxed{\text{A4}}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=3|} \frac{(z-4)(z^4+2)}{}dz$.

$\boxed{4.115}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{z^4+1}$, где C: $x^2+y^2=2x$.

$\boxed{\text{A5}}$ $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z\cos^2\frac{1}{z}\,dz$, где C: $|z|=1$.

$\boxed{4.122}$ $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^n e^{2/z}\,dz$, где $n\in\mathbb{Z}$, C: $|z|=r$.

$\boxed{\text{A6}}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} (1+z+z^2)\left(e^{1/(z+2)}+e^{1/(z+5)}\right)\,dz$.

$\boxed{\text{A7}}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(e^z-1)\operatorname{tg} z}$.

Домашнее задание № 19
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Найти вычеты функции в особых точках:

$\boxed{4.93\ (635)}$ $\sin\dfrac{z}{z+1}$. Подсказка: $\sin(\alpha+\beta)$.

$\boxed{4.94}$ $\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$.

$\boxed{4.96}$ $z^n\sin\dfrac{1}{z}\quad(n\in\mathbb{Z})$.

Вычислить интегралы с помощью вычетов:

$\boxed{4.116}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, где $C\colon |z-2|=\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{A1}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{z\,dz}{\cos z}$, где $C\colon |z+\pi|=2\pi$.

$\boxed{4.117}$ $\displaystyle\int \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, где $C\colon |z|=2$.

$\boxed{4.118}$ $\displaystyle\int \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$, где $C\colon |z|=1$.

$\boxed{4.119}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}\,dz$ где $C\colon |z|=1$.

$\boxed{4.120}$ $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \sin\frac{1}{z}\,dz$, где $C\colon |z|=r$.

$\boxed{4.121}$ $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \sin^2\frac{1}{z}\,dz$, где C — окружность $|z|=r$.

$\boxed{4.123}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} (1+z+z^2)\left(e^{1/z}+e^{1/(z-1)}+e^{1/(z-2)}\right)\,dz$.

$\boxed{4.124}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{z\,dz}{\sin z(1-\cos z)}$.

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр
19-е занятие. Конспект. Вычеты.
Вычисление интегралов с помощью вычетов

Найти вычеты функции в особых точках:

$\boxed{4.91}$ $e^{z+1/z}$.

Решение. Особые точки: $0, \infty$. Найдём только вычет в точке 0 (вычет в ∞ противоположен).

$$\exp(z+1/z) = \exp(z)\cdot\exp(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{-k}}{k!}.$$

Видно, что z^{-1} получается при перемножении слагаемых вида $\dfrac{z^n}{n!}$ и $\dfrac{z^{-k}}{k!}$, когда $k = n+1$.

<u>Ответ</u>: $\operatorname*{res}_0 f = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!\cdot(n+1)!}$. □

$\boxed{\text{A1}}$ $\sin\dfrac{z+4}{z-1}$. Подсказка: $\sin(\alpha+\beta)$.

Решение. Особые точки: $1, \infty$. Найдём только вычет в точке 1. Выделим целую часть дроби и пользуемся формулой синуса суммы:

$$f(z) = \sin\left(1+\frac{5}{z-1}\right) = \sin 1\cdot\cos\frac{5}{z-1} + \cos 1\cdot\sin\frac{5}{z-1} =$$
$$= \sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^{2n}}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^{2n+1}}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}.$$

Отметим, что вычет обладает линейными свойствами: вычет суммы функций равен сумме вычетов, при умножении функции на число вычет умножается на число.

Вычет первого слагаемого равен 0, так как присутствуют только чётные степени $(z-1)$. Во втором слагаемом степень -1 получается при $n=0$. Поэтому

$$\operatorname*{res}_0 f = \cos 1\cdot\frac{-5}{1} = -5\cos 1.$$

□

Теорема о вычетах:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{a\in A}\operatorname*{res}_a f,}$$

где A — множество особых точек, лежащих внутри γ (это множество должно быть конечным).

Вычислить интегралы с помощью вычетов:

$\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}\,dz$, где $C\colon |z| = 1$.

Решение. Внутрь контура попала особая точка $z = 0$. По основной теореме, $I = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}\limits_0 f$. Находим этот вычет, учитывая, что $z = 0$ — полюс второго порядка.

$$F(z) = \frac{e^z}{z^2+9}, \quad F'(z) = \frac{e^z(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2}, \quad \operatorname*{res}_0 f = \frac{1}{9}.$$

□

$\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{z\,dz}{\sin z}$, где $C\colon \left|z - \frac{3\pi}{2}\right| = 2\pi$.

Решение. Внутрь контура попали особые точки $0, \pi, 2\pi, 3\pi$. Но точка $z = 0$ является устранимой особой точкой, в ней вычет равен 0.

Точки $\pi, 2\pi, 3\pi$ являются простыми полюсами. Для вычисления вычетов в этих точках удобно использовать формулу

$$\operatorname*{res}_a \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)},$$

которая работает, когда $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. По этой формуле,

$$\operatorname*{res}_\pi f = \frac{\pi}{\cos\pi} = -\pi, \qquad \operatorname*{res}_{2\pi} f = \frac{2\pi}{\cos 2\pi} = 2\pi, \qquad \operatorname*{res}_{3\pi} f = \frac{3\pi}{\cos 3\pi} = -3\pi.$$

Отсюда $I = 2\pi i \cdot (-2\pi) = -4\pi^2 i$. □

$\boxed{\text{A4}}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{(z-4)(z^4+2)}{}dz.$

Решение. Внутрь контура попадает четыре особых точки — корни четвёртой степени из -2. Но проще посчитать вычеты в двух других особых точках (4 и ∞), а затем использовать тот факт, что сумма всех вычетов равна 0.

$\underline{z = 4.}$ $F(z) = \dfrac{1}{z^4+2}$, $\operatorname*{res}\limits_4 f = F(4) = \dfrac{1}{258}$.

$\underline{z = \infty.}$

$$f(z) = \frac{1}{z^5\left(1-\frac{4}{z}\right)\left(1+\frac{2}{z^4}\right)} =$$
$$= \frac{1}{z^5}\left(1 + \frac{4}{z} + \frac{16}{z^2} + \ldots +\right)\left(1 - \frac{2}{z^4} + \frac{4}{z^8} + \ldots\right).$$

Слагаемое с z^{-1} отсутствует, поэтому $\operatorname*{res}_{\infty} f = 0$.

<u>Ответ</u>: $-\dfrac{2\pi i}{258}$. □

$\boxed{4.115}$ $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{z^4+1}$, где $C\colon x^2+y^2=2x$.

Решение. Разложим знаменатель на множители:

$$z^4+1 = (z^2+i)(z^2-i) = (z-e^{-i\pi/4})(z+e^{-i\pi/4})(z-e^{i\pi/4})(z+e^{i\pi/4}).$$

Внутрь контура попадают точки $e^{i\pi/4}$ и $e^{-i\pi/4}$. Они являются простыми полюсами.

$\underline{z = e^{i\pi/4}.}$ $F(z) = \dfrac{1}{(z+e^{i\pi/4})(z^2+i)}$,

$$\operatorname*{res}_{e^{i\pi/4}} f = \frac{1}{2e^{i\pi/4}\cdot 2i} = -\frac{i}{4}e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i).$$

$\underline{z = e^{-i\pi/4}.}$ $F(z) = \dfrac{1}{(z+e^{-i\pi/4})(z^2-i)}$,

$$\operatorname*{res}_{e^{-i\pi/4}} f = \frac{1}{2e^{-i\pi/4}\cdot(-2i)} = \frac{i}{4}e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1+i).$$

Отсюда $I = 2\pi i\cdot(-\sqrt{2}/4) = -\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$. □

$\boxed{\text{A5}}$ $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z\cos^2\frac{1}{z}\,dz,\quad$ где $C\colon |z|=1$.

Решение. Внутрь контура попадает только особая точка $z=0$, поэтому $I = 2\pi i\operatorname*{res}_{0} f$. Используем разложения по степеням $1/z$:

$$f(z) = z\left(1 - \frac{z^{-2}}{2} + \frac{z^{-4}}{24} + \ldots\right)\left(1 - \frac{z^{-2}}{2} + \frac{z^{-4}}{24} + \ldots\right) =$$
$$= z\left(1 - z^{-2} + \frac{z^{-4}}{3} + \ldots\right) = z - \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \ldots$$

Отсюда $\operatorname*{res}_0 f = -1$ и $I = -2\pi i$. $\square$

$\boxed{4.122}$ $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C z^n e^{2/z}\,dz$, где $n \in \mathbb{Z}$, $C\colon |z| = r$.

Решение. Внутрь контура попадает особая точка $z = 0$. Записываем разложение в этой точке:

$$f(z) = z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k! \cdot z^k}.$$

Нужно найти коэффициент перед z^{-1}. Если $n < -1$, то слагаемых со степенью -1 не будет, т. е. вычет равен 0. Если же $n \geqslant -1$, то нужное слагаемое получается при $k = n + 1$, поэтому

$$I = \operatorname*{res}_0 f = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$\square$

$\boxed{\text{A6}}$ $\displaystyle\int_{|z|=4} (1 + z + z^2)\left(e^{1/(z+2)} + e^{1/(z+5)}\right) dz.$

Решение. Внутрь контура попадает только особая точка $z = -2$. Заметим, что в этой точке функция

$$(1 + z + z^2)e^{1/(z+5)}$$

особенностей не имеет, поэтому её вычет равен 0. Раскладываем в точке -2 другое слагаемое (для разложения многочлена можно использовать схему Горнера):

$$\begin{aligned}(1 + z + z^2)e^{1/(z+2)} = ((z+2)^2 - 3(z+2) + 3)\cdot\\ \cdot\left(1 + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{2(z+2)^2} + \frac{1}{6(z+2)^3} + \ldots\right)\end{aligned}$$

Находим коэффициент при $(z+2)^{-1}$:

$$\operatorname*{res}_{-2} f = 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

Отсюда $I = \dfrac{10\pi i}{3}$. $\square$

$\boxed{\text{A7}}$ $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(e^z - 1)\operatorname{tg} z}.$