

Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр  
20-е занятие. Вычисление интегралов  
с помощью вычетов

Найти следующие тригонометрические интегралы с помощью вычетов:

$$\boxed{\text{A1}} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{2 + \cos 2\varphi}. \quad \boxed{\text{A2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3 + \cos \varphi)^2}. \quad \boxed{\text{A3}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3 + 2 \cos^2 \varphi)^2}.$$

Найти следующие интегралы с бесконечными пределами от рациональных функций с помощью вычетов:

$$\boxed{4.141} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} \quad (a > 0). \quad \boxed{4.142, n = 2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Упрощённая формулировка леммы Жордана:

**Лемма 1 (Жордан).** Пусть функция  $f$  голоморфна во всей комплексной плоскости, за исключением конечного множества особых точек, и

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} M(R) = 0, \quad \text{где} \quad M(R) = \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)|.$$

Тогда для любого  $\lambda \geq 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0,$$

где  $\gamma_R$  — верхняя полуокружность окружности  $|z| = R$ .

Вычислить интегралы с помощью вычетов, пользуясь леммой Жордана:

$$\boxed{\text{A4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 5}.$$

$$\boxed{\text{A5}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 9}.$$

## Домашнее задание № 20

### Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Вычислить следующие интегралы от тригонометрических функций с помощью вычетов:

$$\boxed{4.131 (673)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} \quad (a > 1). \quad \text{Указание. Положить } z = e^{i\varphi}.$$

$$\boxed{4.132 (674)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2} \quad (a > b > 0).$$

$$\boxed{4.133 (675)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos^2 \varphi)^2} \quad (a > 0, b > 0).$$

Найти следующие интегралы с бесконечными пределами от рациональных функций с помощью вычетов:

$$\boxed{4.140 (682)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}. \quad \boxed{4.142 (684), n = 3} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$\boxed{4.143 (685)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\boxed{4.144 (686)} \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

Вычислить интегралы, пользуясь леммой Жордана:

$$\boxed{4.149 (691)} \quad 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}. \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

$$\boxed{4.150 (692)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}. \quad \boxed{4.151 (693)} \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

$$\boxed{4.152 (694)} \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx \quad (a > 0, b > 0).$$