

**Первая контрольная работа, пробный вариант № 1.
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр**

1] Вычислить интеграл с помощью формулы Фруллани (обосновать применимость формулы Фруллани):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{x} dx.$$

2] Вычислить интеграл, выразив его через Γ - или B -функцию:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{1/3} x dx.$$

3] Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int_{\gamma} (x + y) dx + (y - x) dy,$$

где γ — замкнутая ломаная с вершинами $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -1)$, $D(1, -1)$.

4] Найти потенциал поля $\left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ в плоскости с разрезом

$$\{(x, y) : y = -x, x \leq 0\},$$

принимаящий в точке $(0, -1)$ значение 0.

5] Доказать, что функция является гармонической, и построить сопряжённую к ней функцию в указанной области:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 5y - 2x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad (x > 0).$$

6 (доп.) Пусть z_0, z_1, \dots, z_{n-1} — вершины правильного n -угольника с центром 0 и радиусом R , причём $z_0 = R$. Далее, пусть $d > 0$, $d \neq R$. Найти произведение расстояний от точки d до вершин n -угольника:

$$\prod_{k=0}^{n-1} |z_k - d| = ?$$

Первая контрольная работа, пробный вариант № 2.
Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

1] Вычислить интеграл с помощью дифференцирования по параметру под знаком интеграла (обосновать равномерную сходимость интеграла от производной на любом сегменте):

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

2] Вычислить интеграл, выразив его через Γ - или B -функцию:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln^2 x}{1+x} dx.$$

3] Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить интеграл

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

вдоль путей, не проходящих через $(0, 0)$.

4] Найти потенциал поля $\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ в плоскости с разрезом

$$\{(x, y) : y = 0, x \geq 0\},$$

принимая в точке $(0, 1)$ значение 0.

5] Выяснить, существуют ли гармонические функции указанного вида (отличные от постоянной), и в случае существования найти их:

$$u = \varphi(x^2 + y^2).$$

6 (доп.)] Из формулы суммы геометрической прогрессии вывести формулы для тригонометрических сумм:

$$1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi = ? \quad \sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi = ?$$