Вторая контрольная работа, пробный вариант № 1. Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Приращение аргумента

$\boxed{1.1}$ Провести в комплексной плоскости разрез так, чтобы в плоскости с этим разрезом из многозначной функции $\operatorname{Arg} z$ можно было выделить однозначную ветвь $f(z)$, принимающую в двух заданных точках заданные значения: $f(i) = -\frac{3\pi}{2}$, $f(5) = -6\pi$. Разрез должен исходить из нуля и заканчиваться лучом.

$\boxed{1.2}$ Пусть $z(t) = 3e^{-it}$, где $t \in [0, 2\pi]$, и $f(t)$ — непрерывная ветвь многозначной функции $\operatorname{Arg}\sqrt{z^2(t) - 3z(t) + 2}$. Найти $f(t)\big|_0^{2\pi}$.

Вычисление значений элементарных функций

$\boxed{2.1}$ Выразить Arcsin через Ln и квадратный корень.

$\boxed{2.2}$ Найти все значения $\operatorname{Arcsin} i$.

Кривые в комплексной плоскости

$\boxed{3.1}$ Изобразить кривую, заданную уравнением $|z - 2i| - |z + 4i| = 4$.

$\boxed{3.2}$ Найти образ линии $|z - 1| = 1$ при отображении $w = 1/z$.

Условия Коши-Римана

$\boxed{4.1}$ Проверить, что функция $u(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ гармоническая в области $x^2 + y^2 \neq 0$. Построить в области $z \neq 0$ такую аналитическую функцию $f(z)$, что $\operatorname{Re} f(x + yi) = u(x, y)$.

Дополнительное задание

$\boxed{5.1}$ Используя формулу суммы геометрической прогрессии, вывести формулы для тригонометрических сумм:

$$1 + \cos x + \ldots + \cos nx, \qquad \sin x + \ldots + \sin nx.$$

Вторая контрольная работа, пробный вариант № 2. Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Приращение аргумента

$\boxed{1.1}$ Пусть $f(z)$ — непрерывная ветвь многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, определённая в плоскости $\mathbb{C}$ со следующим разрезом:

$$z(t) = \begin{cases} te^{it}, & t \in [0, 3\pi]; \\ -t, & t \in [3\pi, +\infty). \end{cases}$$

Найти $f(-10+i)$, если $f(i) = -\dfrac{3\pi}{2}$.

$\boxed{1.2}$ Пусть $z(t) = 3e^{it}$, где $t \in [0, 2\pi]$, и $f(t)$ — непрерывная ветвь функции $\operatorname{Arg} \sqrt{\dfrac{z(t)-4}{z(t)+2i}}$. Найти $f(t)\big|_0^{2\pi}$.

Вычисление значений элементарных функций

$\boxed{2.1}$ Найти $\operatorname{Re}(\operatorname{tg} z)$ и $\operatorname{Im}(\operatorname{tg} z)$.

$\boxed{2.2}$ Вычислить все значения $(1+i)^i$.

Кривые в комплексной плоскости

$\boxed{3.1}$ Изобразить кривую, заданную уравнением $|z| = \operatorname{Re} z + 1$.

$\boxed{3.2}$ Найти прообраз линии $u = 2$ при отображении $w = z + \dfrac{1}{z}$.

Условия Коши-Римана

$\boxed{4.1}$ Проверить, что функция $u(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ гармоническая в области $x > 0$. Построить такую аналитическую функцию $f(z)$ в области $\operatorname{Re} z > 0$, что $\operatorname{Re} f(x+yi) = u(x,y)$.

Дополнительное задание

$\boxed{5.1}$ Пусть $z(t) = -i + ie^{it}$, где $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Найти такую непрерывную функцию $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, что $f(t) \in \operatorname{Arg}(z(t))$ при любом $t \in [0, 2\pi]$ и $f(\pi) = -\frac{\pi}{2}$.

Вторая контрольная работа, пробный вариант № 3. Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

Приращение аргумента

$\boxed{1.1}$ Провести в комплексной плоскости разрез так, чтобы в плоскости с этим разрезом из многозначной функции $\operatorname{Arg} z$ можно было выделить однозначную ветвь $f(z)$, принимающую в двух заданных точках заданные значения: $f(-1) = -\pi$, $f(-5i) = \frac{7\pi}{2}$. Разрез должен исходить из нуля и заканчиваться лучом.

$\boxed{1.2}$ Пусть $z(t) = 3e^{2it}$, где $t \in [0, 2\pi]$, и $f(t)$ — непрерывная ветвь функции $\operatorname{Arg}(z(t) - i)$. Найти $f(t)\big|_0^{2\pi}$.

Вычисление значений элементарных функций

$\boxed{2.1}$ Выразить Arth через Ln.

$\boxed{2.2}$ Найти все значения $\operatorname{Arth}(2i)$.

Кривые в комплексной плоскости

$\boxed{3.1}$ Объяснить геометрический смысл соотношения $\operatorname{Re}\dfrac{z_2}{z_1} = 0$. Изобразить множество точек в комплексной плоскости, заданное уравнением $\operatorname{Re}\dfrac{z-2i}{z+3} = 0$.

$\boxed{3.2}$ Найти прообраз линии $u = -4$ при отображении $w = 1/z$.

Условия Коши-Римана

$\boxed{4.1}$ Пусть $f(z) = \sin z$. Найти функции $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+yi)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+yi)$, проверить для них условия Коши-Римана и вычислить $f'(z)$ через частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Дополнительное задание

$\boxed{5.1}$ Найти наибольшее расстояние от 0 до точек линии $\left|z + \dfrac{4}{z}\right| = 6$.