Контрольная работа № 3, пробный вариант № 1. Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{1}$ Найти радиус сходимости степенного ряда и вычислить его сумму внутри круга сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n}.$$

$\boxed{2}$ Используя результат предыдущей задачи и теорему Абеля о сумме степенного ряда, вывести формулу для следующей суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n\varphi}{n} \qquad (-\pi < \varphi < \pi).$$

$\boxed{3}$ Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в точке $z_0 = 0$ и найти радиус сходимости:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-2)^2}.$$

Вычислить интегралы с помощью вычетов:

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \left(\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} \right) dz.$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{2 + \cos(2\varphi)}.$

$\boxed{6}$ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x \, dx}{x^2 - 2x + 10}.$

$\boxed{7 \text{ (доп.)}}$ Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в точке $z_0 = 0$ и найти радиус сходимости: $f(z)$ — непрерывная ветвь $\operatorname{Arth} z$, для которой $f(0) = 0$.

Контрольная работа № 3, пробный вариант № 2. Матем. анализ, прикл. матем., 4-й семестр

$\boxed{1}$ Найти радиус сходимости степенного ряда и вычислить его сумму внутри круга сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

$\boxed{2}$ Используя результат предыдущей задачи и теорему Абеля о сумме степенного ряда, вывести формулу для следующей суммы:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\varphi)}{2n+1} \qquad (0 < \varphi < \pi).$$

$\boxed{3}$ Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в точке $z_0 = 0$ и найти радиус сходимости:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2}.$$

Вычислить интегралы с помощью вычетов:

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z+3)(z^5+1)}.$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3+2\cos\varphi)^2}.$

$\boxed{6}$ $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$

$\boxed{\text{7 (доп.)}}$ Доказать признак Абеля: для сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, где $a_n \in \mathbb{C}$, $b_n \in \mathbb{R}$, достаточно, чтобы ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, а последовательность $\{b_n\}$ была монотонной и ограниченной.