О корнях, полюсах и вычетах

Основные теоремы о голоморфных функциях

Будем говорить, что функция f голоморфна в области D, если она непрерывно дифференцируема по комплексному переменному в этой области. Множество всех функций, голоморфных в области D, обозначают через $H(D)$.

Теорема 1 (о голоморфности суммы степенного ряда).
Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

имеет радиус сходимости R, $R > 0$. Тогда его сумма является голоморфной функцией в круге $\{z \in \mathbb{C} \colon |z-z_0| < R\}$.

Теорема 2 (о разложении в ряд Тейлора).
Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f \in H(D)$, $z_0 \in D$, r — расстояние от точки z_0 до границы области D. Тогда для всех z из круга $\{z \in \mathbb{C} \colon |z-z_0| < r\}$ выполняется равенство:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{1}$$

где $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. В частности, радиус сходимости ряда (1) не меньше, чем r.

Теорема 3 (о разложении в ряд Лорана).
Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $f \in H(D \setminus \{z_0\})$, r — расстояние от точки z_0 до границы области D. Тогда для всех z из кольца $\{z \in \mathbb{C} \colon 0 < |z-z_0| < r\}$ выполняется разложение

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{2}$$

где коэффициенты c_n могут быть вычислены как следующие интегралы по окружности $|z-z_0| = \rho$, где $0 < \rho < r$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Говорят, что точка z является *корнем* (или *нулём*) функции f, если $f(z)=0$.

Теорема 4 (единственности для голоморфных функций). *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f \in H(D)$, и существует последовательность z_n в D, состоящая из попарно различных корней функции f, которая сходится к конечной точке a, принадлежащей D. Тогда функция $f(z) = 0$ для любого $z \in D$.*

О кратности корня

Будем считать, что z_0 — некоторое комплексное число, f — функция, определённая и аналитическая в некоторой области D, содержащей точку z_0.

Предложение 1. *Следующие условия равносильны:*
(a) *f является нулевой константой в области D;*
(b) *$f^{(n)}(z_0) = 0$ для любого n из $\{0, 1, 2, \ldots\}$.*

Доказательство. (a) $\Longrightarrow$ (b). Из определения производной следует, что если функция нулевая, то и все её производные нулевые.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Из теоремы 2 следует, что функция f равна нулю в некотором круге с центром в точке z_0. Очевидно, в круге можно выбрать последовательность попарно различных точек, сходящуюся к какой-нибудь точке круга (например, к центру). Значит, по теореме единственности, функция f равна нулю во всей области D. □

Предложение 2. *Пусть $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Тогда следующие условия равносильны:*
(a) *$f^{(n)}(z_0) = 0$ для любого $n < k$ и $f^{(k)}(z_0) \neq 0$;*
(b) *ряд Тейлора функции f в точке z_0 имеет вид*

$$f(z) = c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \ldots, \tag{3}$$

где $c_k \neq 0$;
(c) *существует такая функция g, аналитическая в области D, что $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ и $g(z_0) \neq 0$.*

Доказательство. Равносильность условий (a) и (b) сразу следует из теоремы 2.

(b) $\Longrightarrow$ (c). Определим функцию $g(z)$ формулой

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}, & z \in D \setminus \{z_0\}; \\ c_k, & z = z_0 \end{cases}$$

Очевидно, g голоморфна в $D \setminus \{z_0\}$. Осталось доказать, что она голоморфна в окрестности точки z_0. При $0 < |z - z_0| < r$ имеет место разложение в ряд:

$$g(z) = c_k + c_{k+1}(z - z_0) + c_{k+2}(z - z_0)^2 + \dots . \tag{4}$$

Эта формула остаётся верной и при $z = z_0$, так как $g(z_0) = c_k$. Радиус сходимости ряда (4) такой же, как и радиус сходимости ряда (3). Обозначим его через R. В данный момент важно, что $R > 0$. По теореме 1, сумма ряда (4) является голоморфной функцией в круге $\{z\colon |z - z_0| < R\}$. Значит, функция g голоморфна в этом круге.

(c) $\Longrightarrow$ (b). Раскладываем функцию g в ряд Тейлора в точке z_0 и умножаем это разложение на $(z - z_0)^k$. □

Определение 1. Точка z_0 является корнем кратности k функции f, если выполняются условия предложения 2.

О порядке полюса

Будем считать, что z_0 — некоторое комплексное число, D — область, содержащая точку z_0, f — функция, определённая и аналитическая в $D \setminus \{z_0\}$.

Определение 2. Говорят, что z_0 является полюсом порядка k функции f, если её ряд Лорана в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots , \tag{5}$$

где $c_{-k} \neq 0$.

Предложение 3. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда следующие условия равносильны:*

(a) *z_0 есть полюс порядка k функции f;*

(b) *существует такая функция g, аналитическая в области D, что $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^k}$ при $z \neq z_0$ и $g(z_0) \neq 0$.*

Доказательство. (a) $\Longrightarrow$ (b). Пусть (5) — ряд Лорана функции f в точке z_0. Определим функцию g формулой

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^k f(z), & z \in D \setminus \{z_0\}; \\ c_{-k}, & z = z_0. \end{cases}$$

Тогда g голоморфна в $D \setminus \{z_0\}$ как произведение голоморфных функций. Докажем голоморфность в окрестности точки z_0. Из формулы (5) и определения функции g следует, что

$$g(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + c_{-k+2}(z - z_0)^2 + \dots .$$

Этот ряд имеет положительный радиус сходимости (такой же, как и ряд 5). Значит, по теореме 1, g голоморфна внутри круга сходимости.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Рассматриваем разложение функции g ряд Тейлора и делим его на $(z-z_0)^k$. Получаем, что для функции f выполняются условия определения 2. □

Предложение 4. *Пусть φ и ψ — аналитические функции в области D, $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. Далее, пусть точка z_0 является корнем кратности m функции φ и корнем кратности n функции ψ.*

1. *Если $m \geqslant n$, то z_0 является устранимой особой точкой функции f. После доопределения по непрерывности функция f становится аналитической в D, а z_0 будет её корнем кратности $m - n$.*
2. *Если $n > m$, то z_0 — полюс порядка $n - m$ функции f.*

Доказательство. Следует из предложений 3 и 2. □

Вычисление вычета в полюсе

Как и в предыдущем разделе, будем считать, что z_0 — некоторое комплексное число, D — область, содержащая точку z_0, f — функция, определённая и аналитическая в $D \setminus \{z_0\}$.

Напомним, что вычетом функции f в точке z_0 называют коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в ряде Лорана функции f в точке z_0. В обозначениях формулы (2), $\operatorname*{res}_{z_0} f = c_{-1}$.

Наша цель — вывести формулы для вычисления вычета. Сначала рассмотрим частный случай, когда полюс простой, т. е. когда кратность полюса равна 1.

Предложение 5. *Пусть z_0 — простой полюс функции f, F — такая голоморфная функция, что $f(z) = \dfrac{F(z)}{z - z_0}$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f = F(z_0).$$

Другими словами,

$$\operatorname*{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Доказательство. Существование функции F следует из предложения 3 при $k = 1$. Пусть f имеет разложение

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

Тогда

$$F(z) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + c_2(z - z_0)^3 + \ldots$$

Отсюда $F(z_0) = c_{-1}$, что и требовалось. $\square$

В случае простого полюса функция часто бывает представлена в виде дроби, в которой знаменатель имеет простой корень.

Предложение 6. *Пусть* $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, *где* $\varphi, \psi \in H(D)$, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. *Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Доказательство. $\displaystyle\lim_{z\to z_0} (z - z_0) \cdot \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$

Здесь использованы непрерывность φ, условие $\psi(z_0) = 0$ и определение производной. $\square$

Теперь рассмотрим общий случай (полюс кратности k).

Предложение 7. *Пусть z_0 — полюс порядка k функции f, и F — такая голоморфная функция, что* $f(z) = \dfrac{F(z)}{(z - z_0)^k}$. *Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} F^{(k-1)}(z_0).$$

Доказательство. Пусть f имеет разложение

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots$$

Тогда

$$F(z) = c_{-k} + \ldots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + c_0(z - z_0)^k + \ldots$$

Чтобы уничтожить слагаемые слева от c_{-1}, дифференцируем $k - 1$ раз:

$$F^{(k-1)}(z) = (k-1)!c_{-1} + k(k-1) \cdot \ldots \cdot 2c_0(z - z_0) + \ldots$$

Чтобы исчезли слагаемые справа от c_{-1}, подставляем $z = z_0$ и получаем нужный результат. $\square$