Гипотеза о периодичности в задаче Иосифа Флавия о считалочке

1 декабря 2007 г.

Содержание

1 Введение

Рассмотрим задачу о считалочке, которую часто связывают с именем Иосифа Флавия (см. [2, раздел 1.3]): n человек с номерами $0, 1, \ldots, n-1$ становятся в круг, после чего каждый q-й исключается. Следуя статье М. А. Алексеева [1], обозначим искомый номер последнего оставшегося участника через $J_q(n)$.

Например, при $n = 4$ и $q = 3$ сначала выйдет участник с номером 2, потом участник с номер 1, потом участник с номером 3, и останется участник с номером 0. Поэтому $J_3(4) = 0$.

Хорошо известно (см., например, [1]), что числа $J_q(n)$ подчиняются рекуррентному соотношению

$$J_q(n) = (J_q(n-1) + q) \bmod n \qquad (q = 1, 2, \ldots;\ n = 2, 3, \ldots) \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$J_q(1) = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots). \tag{1.2}$$

Формулы (1.1) и (1.2) позволяют определить $J_q(n)$ для любых целых q и любых положительных целых n.

Замкнутая формула для $J_q(n)$ неизвестна. В [2] несколькими способами выведена формула при $q = 2$, в [1] предложен алгоритм быстрого вычисления $J_q(n)$.

2 Таблица остатков

Приведём некоторые элементарные сведения из теории чисел, которые могут оказаться полезными при обсуждении задачи о считалочке. Для знакомства с теорией чисел можно почитать учебники [3] и [4].

Пусть n — фиксированное положительное число. Каждому целому q можно сопоставить целочисленный кортеж (упорядоченный набор)

$$(q \bmod 1, q \bmod 2, \ldots, q \bmod n). \tag{2.1}$$

Например, при $n = 4$ и $0 \leqslant q < 12$ получится таблица:

	$q \bmod 1$	$q \bmod 2$	$q \bmod 3$	$q \bmod 4$
$q = 0$	0	0	0	0
$q = 1$	0	1	1	1
$q = 2$	0	0	2	2
$q = 3$	0	1	0	3
$q = 4$	0	0	1	0
$q = 5$	0	1	2	1
$q = 6$	0	0	0	2
$q = 7$	0	1	1	3
$q = 8$	0	0	2	0
$q = 9$	0	1	0	1
$q = 10$	0	0	1	2
$q = 11$	0	1	2	3

Будем обозначать через $\Psi(n)$ наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$. Легко видеть, что последовательность кортежей (2.1) имеет период $\Psi(n)$, и внутри периода все значения этой последовательности попарно различны. После факторизации получается мономорфизм $\mathbb{Z}_{\Psi(n)}$ в $\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_n$.

Целочисленный кортеж $(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит множеству значений последовательности (2.1) тогда и только тогда, когда $0 \leqslant a_m < m$ для всех m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ и выполняются следующие условия:

$$a_m \equiv a_d \pmod{d} \qquad (1 \leqslant m \leqslant n,\ 1 < d < m,\ d \backslash m). \tag{2.2}$$

Легко видеть, что система условий (2.2) равносильна своей подсистеме:

$$a_m \equiv a_d \pmod{d} \qquad (1 \leqslant m \leqslant n,\ d \in D_m), \tag{2.3}$$

где D_m обозначает множество делителей m, бóльших 1, меньших m и являющихся степенями простых чисел.

3 Таблица считалочки

Теперь рассмотрим таблицу значений $J_q(n)$:

	$J_q(1)$	$J_q(2)$	$J_q(3)$	$J_q(4)$
$q=0$	0	0	0	0
$q=1$	0	1	2	3
$q=2$	0	0	2	0
$q=3$	0	1	1	0
$q=4$	0	0	1	1
$q=5$	0	1	0	1
$q=6$	0	0	0	2
$q=7$	0	1	2	1
$q=8$	0	0	2	2
$q=9$	0	1	1	2
$q=10$	0	0	1	3
$q=11$	0	1	0	3

Формула (1.1) показывает, что таблица значений $J_q(n)$ получается из таблицы остатков в результате сложения столбцов: первый столбец прибавляется ко второму (по модулю 2), полученный второй к третьему (по модулю 3), и т. д. Чтобы из таблицы считалочки получить таблицу остатков, нужно из m-го столбца вычитать $m-1$-й (по модулю m) в следующем порядке: $m = n, n-1, \ldots, 1$.

Другими словами, строчки таблицы считалочки получаются из строк таблицы остатков по формуле (1.1), а обратный переход можно осуществить по формуле

$$q \bmod n = (J_q(n) - J_q(n-1)) \bmod n.$$

Целочисленный набор $(a_1, \ldots, a_n)$ назовём *допустимым*, если $0 \leqslant a_m < m$ для всех m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ и выполняются условия:

$$a_m - a_{m-1} \equiv a_d - a_{d-1} \pmod{d} \qquad (1 \leqslant m \leqslant n,\ 1 < d < n,\ d \backslash n). \quad (3.1)$$

Эта система условий равносильна своей подсистеме:

$$a_m - a_{m-1} \equiv a_d - a_{d-1} \pmod{d} \qquad (1 \leqslant m \leqslant n,\ d \in D_m). \quad (3.2)$$

Из биективного соответствия между таблицей остатков и таблицей считалочки вытекает следующий простой результат.

Предложение 3.1. *При фиксированном n последовательность кортежей*

$$(J_q(1), J_q(2), \ldots, J_q(n))$$

имеет период $\Psi(n)$, причём внутри периода все значения этой последовательности различны. Множество значений этой последовательности совпадает с множеством допустимых наборов длины n.

4 Гипотеза о равнораспределении

Пусть $n \geqslant 2$, $0 \leqslant a < n-1$, $0 \leqslant b < n$. Тогда среди пар

$$(J_q(n-1), J_q(n)) \qquad (0 \leqslant q < \Psi(n))$$

пара (a, b) встречается ровно $\dfrac{\Psi(n)}{n(n-1)}$ раз.

5 Гипотеза о периодичности

При фиксированном n последовательность $\{J_q(n)\}_{q \in \mathbb{Z}}$ имеет период $\Psi(n)$, и внутри периода каждое из чисел $0, \ldots, n-1$ встречается $\dfrac{\Psi(n)}{n}$ раз.

Это утверждение можно вывести из гипотезы о равнораспределении.

6 Гипотеза об асимптотической независимости

Пусть $n \geqslant 2$, $0 \leqslant a_1, a_2 < n$. Через $C_2(n, a_1, a_2)$ обозначим число таких q, $0 \leqslant q < \Psi(n)$, что $J_q(n) = a_1$, $J_{q+1}(n) = a_2$. Образно говоря, $C_2(n, a_1, a_2)$

показывает, сколько раз b следует за a в n-м столбце таблицы считалочки. Если бы $J_{q+1}(n)$ было независимо от $J_q(n)$, то

$$C_2(n, a_1, a_2) = \frac{\Psi(n)}{n^2}$$

для любых a_1, a_2. Легко видеть, что для малых n это не так.

Обозначим $\frac{\Psi(n)}{n^2}$ через $Q_2(n)$ и рассмотрим величину максимального относительного отклонения $C_2(n, a_1, a_2)$ от $Q_2(n)$:

$$\Delta_2(n) = \max_{0 \leqslant a_1, a_2 < n} \frac{C_2(n, a_1, a_2) - Q_2(n)}{Q_2(n)}.$$

Аналогично можно определить $\Delta_3(n)$, $\Delta_4(n)$ и т. д.

Стремятся ли эти величины к 0 при $n \to \infty$?

Список литературы

[1] Алексеев М. А. Задача Иосифа Флавия // Империя Математики, 2 (2001), стр. 22-28.
http://www-cse.ucsd.edu/~maxal/josephus.pdf

[2] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. — М.: «Мир», 1998. — 703 с.

[3] Виноградов И. М. Основы теории чисел. — 6-е изд., испр. — М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. — 180 с.

[4] Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел: Пер. с англ. — М.: «Мир», 1987. — 416 с.